Compléments d'algèbre

Trace

Trace d'une matrice

Définition. *La trace d'une matrice* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie par* $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Savoir faire 1-1 Montrer que $\mathrm{Tr} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array} \right.$ est linéaire.

Savoir faire 1-2 Montrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
A-t-on $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A).\mathrm{Tr}(B)$?

Savoir faire 1-3 Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
Rappel : On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Trace d'un endomorphisme

Définition. *Soit E un espace de dimension finie et f un endomorphisme de E. On appelle trace de f le réel noté $Tr(f)$ égal à la trace de la matrice de f exprimée dans une base quelconque de E.*

On justifie cette définition par la proposition suivante :

Proposition. *E est un espace de dimension fini et f un endomorphisme de E. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. On note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Alors $Tr(A) = Tr(A')$*

Savoir faire 1-4 Déterminer la trace de $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array} \right.$

Savoir faire 1-5 $\mathbb{C}$ est ici considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Déterminer la trace de $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 3z + \bar{z} \end{array} \right.$

Savoir faire 1-6 Déterminer la trace de $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P' + P(0) \end{array} \right.$