Déterminants

Définition et multilinéarité

Introduction

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, la colinéarité de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ se caractérise par la proportionnalité des coordonnées. Ainsi

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff ad - bc = 0$$

La quantité $ad - bc$ s'appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, 3 vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ forment une famille liée si et seulement si le produit mixte de ces vecteurs est nul.

$$\begin{aligned} (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ est une famille liée} &\iff \vec{u}.(\vec{v} \wedge w) = 0 \\ &\iff a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Le produit mixte est également appelé déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Il se note :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

L'un des objectifs du cours est de généraliser ces notions à la caractérisation des familles libres de n vecteurs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Définition

Dans cette partie A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1 Le déterminant de A est défini par récurrence de la façon suivante :

1. Si $n = 1$, c'est-à-dire si $A = (a)$ alors $\det A = a$
2. Si $n > 1$, notons $A_{i,j}$ la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Alors
$$\det A = \sum_k = (-1)^{1+k} a_{1,k} \det A_{1,k}$$

Remarque

1. On appelle également déterminant l'application : $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \det A \end{array} \right.$.
2. Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est également noté $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
3. Le déterminant de la matrice identité vaut 1. Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de la diagonale.

2 Multilinéarité du déterminant

Proposition 1 Le déterminant est une forme linéaire par rapport aux colonnes de la matrice A. Autrement dit, si les colonnes de A sont notées $C_1,\dots,C_n$ alors pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$\det(C_1,\dots,\lambda C_i+C_i',\dots,C_n)=\lambda\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)+\det(C_1,\dots,C_i',\dots,C_n)$$

On dit que le déterminant est une forme n-linéaire.

Preuve :
On montre la proposition à l'aide d'une récurrence sur n : l'initialisation pour $n=1$ est évidente et on suppose la proposition vraie au rang $n-1$.

i est un entier choisi dans l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. A' est la matrice obtenue en remplaçant, dans la matrice A, la colonne C_i par la colonne $C_i'=\begin{pmatrix}a'_{1i}\\ \vdots\\ a'_{ni}\end{pmatrix}$. De même, on appelle B la matrice obtenue en remplaçant, dans la matrice A, la colonne C_i par la colonne $C_i+\lambda C_i'$.
Le développement de $\det B$ par rapport à la première ligne est :

$$\begin{aligned}\det B &= a_{11}\det B_{11}+\dots+(-1)^i a_{1,i-1}\det B_{1,i-1}\\ &\quad+(-1)^{1+i}(a_{1i}+\lambda a'_{1i})\det B_{1i}\\ &\quad+(-1)^{2+i}a_{1,i+1}\det B_{1,i+1}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}\det B_{1n}\end{aligned}$$

Si $k\neq i$, alors la matrice B_{1k} est de la forme :

$$B_{1k}=\begin{pmatrix}? & \dots & ? & a_{2i}+\lambda a'_{2i} & ? & \dots & ?\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ ? & \dots & ? & a_{ni}+\lambda a'_{ni} & ? & \dots & ?\end{pmatrix}$$

$\det B_{1k}$ étant d'ordre $n-1$, d'après l'hypothèse de récurrence $\det B_{1k}=\det A_{1k}+\lambda\det A'_{1k}$.

Si $k=i$, alors la matrice B_{1i} est de la forme

$$B_{1i}=\begin{pmatrix}? & \dots & ? & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & ? & \dots & ?\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ ? & \dots & ? & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & ? & \dots & ?\end{pmatrix}$$

et donc $B_{1i}=A_{1i}=A'_{1i}$.

Finalement :

$$\begin{aligned}\det B &= a_{11}(\det A_{11}+\lambda\det A'_{11})+\dots+(-1)^i a_{1,i-1}(\det A_{1,i-1}+\lambda\det A'_{1,i-1})\\ &\quad+(-1)^{1+i}(a_{1i}+\lambda a'_{1i})\det B_{1i}\\ &\quad+(-1)^{2+i}a_{1,i+1}(\det A_{1,i+1}+\lambda\det A'_{1,i+1})+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}(\det A_{1n}+\lambda\det A'_{1n})\\ &= a_{11}\det A_{11}+\dots+(-1)^{1+i}a_{1i}\det A_{1i}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}\\ &\quad+\lambda\left(a_{11}\det A_{11}+\dots+(-1)^{1+i}a'_{1i}\det A_{1i}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}\right)\\ &= \det A+\lambda\det A'\end{aligned}$$

Proposition 2 Si deux colonnes de A sont identiques alors le déterminant de A est nul. On dit que le déterminant est une forme n-linéaire alternée.

Savoir faire 1 Preuve :

1. On montre d'abord que si deux colonnes **consécutives** de A sont identiques alors le déterminant est nul. Par récurrence sur n : l'initialisation pour $n=2$ est évidente et on suppose la proposition vraie au rang $n-1$.

   Soit i et $i+1$ deux entiers distincts de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. On suppose que les colonnes C_i et C_{i+1} sont identiques.
   Si $k \in \{1,\dots,n\}$ est différent de i et de $i+1$ alors la matrice A_{1k} contient les colonnes C_i et C_{i+1} qui sont identiques. Par hypothèse de récurrence, le déterminant est nul. De plus les matrices $A_{1,i}$ et $A_{1,i+1}$ sont identiques ainsi que les scalaires a_{1i} et $a_{1,i+1}$. Le développement de $\det A$ par rapport à la première ligne de A est alors :
$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\det A_{11} + \cdots + (-1)^{1+i}a_{1i}\det A_{1i} + (-1)^{2+i}a_{1,i+1}\det A_{1,i+1} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}\\ &= (-1)^{1+i}a_{1i}\det A_{1i} + (-1)^{2+i}a_{1,i+1}\det A_{1,i+1}\\ &= (-1)^{1+i}(a_{1i}-a_{1,i+1})\det A_{1i}\\ &= 0\end{aligned}$$
2. On montre maintenant qu'en permutant deux colonnes consécutives de A le déterminant change de signe. Soit i et $i+1$ deux entiers distincts de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$.
$$\begin{aligned}0 &= \det(C_1,\dots,C_i+C_{i+1},C_i+C_{i+1},\dots,C_n)\\ &= \det(C_1,\dots,C_i,C_i+C_{i+1},\dots,C_n) + \det(C_1,\dots,C_{i+1},C_i+C_{i+1},\dots,C_n)\\ &= \underbrace{\det(C_1,\dots,C_i,C_i,\dots,C_n)}_{0} + \det(C_1,\dots,C_i,C_{i+1},\dots,C_n)\\ &\quad + \det(C_1,\dots,C_{i+1},C_i,\dots,C_n) + \underbrace{\det(C_1,\dots,C_{i+1},C_{i+1},\dots,C_n)}_{0}\\ &= \det(C_1,\dots,C_i,C_{i+1},\dots,C_n) + \det(C_1,\dots,C_{i+1},C_i,\dots,C_n)\end{aligned}$$
   D'où $\det(C_1,\dots,C_i,C_{i+1},\dots,C_n) = -\det(C_1,\dots,C_{i+1},C_i,\dots,C_n)$
3. Soit i et j deux entiers distincts de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. On va montrer que si les colonnes C_i et C_j sont identiques alors $\det A = 0$.
   En effectuant un certain nombre (noté N) de permutations de deux colonnes consécutives dans A il est possible de se ramener à une matrice A' où les deux colonnes C_i et C_j sont maintenant consécutives. Alors
$$\det A = (-1)^N \det A' = 0$$

Proposition 3 Le déterminant de A change de signe lorsque l'on échange entre elles deux colonnes de la matrice A.

Savoir faire 2 Preuve : Soit i et j deux entiers distincts de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$.
$$\begin{aligned}0 &= \det(C_1,\dots,C_i+C_j,\dots,C_i+C_j,\dots,C_n)\\ &= \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_i+C_j,\dots,C_n) + \det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i+C_j,\dots,C_n)\\ &= \underbrace{\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_i,\dots,C_n)}_{0} + \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n)\\ &\quad + \det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n) + \underbrace{\det(C_1,\dots,C_j\dots,C_j,\dots,C_n)}_{0}\\ &= \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) + \det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)\end{aligned}$$
D'où $\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) = -\det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)$

Proposition 4 On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Savoir faire 3 Preuve: par exemple, dans le cas où on ajoute à C_1 une combinaison linéaire $\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$ des autres colonnes.

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) \\
&= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \lambda_2 \underbrace{\det(C_2, C_2, \ldots, C_n)}_{0} + \cdots + \lambda_n \underbrace{\det(C_n, C_2, \ldots, C_n)}_{0} \\
&= \det(C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n, C_2, \ldots, C_n)
\end{aligned}$$

Proposition 5 Si les colonnes de A forment une famille liée alors $\det A = 0$.

Savoir faire 4 Preuve : Les colonnes de A forment une famille liée, l'une des colonnes est donc combinaison linéaire des autres. Quitte à échanger l'ordre des colonnes, supposons qu'il s'agisse de la première colonne et que $C_1 = \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) \\
&= \det(\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n, C_2, \ldots, C_n) \\
&= \lambda_2 \underbrace{\det(C_2, C_2, \ldots, C_n)}_{0} + \cdots + \lambda_n \underbrace{\det(C_n, C_2, \ldots, C_n)}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque Il existe en réalité une unique forme n-linéaire alternée sur l'ensemble des matrices d'ordre n telle que l'image de I_n soit égale à 1. Cette application est le déterminant défini ici. Les autres formes n-linéaires alternées (celles dont l'image de I_n n'est pas 1) sont proportionnelles au déterminant. Ce résultat ne sera pas démontré dans ce cours.