Déterminants

Déterminant d'un produit de matrices

1 Proposition

Définition 1 — Rappel sur les opérations élémentaires. On appelle opération élémentaire sur les colonnes de la matrice A, l'une des opérations suivantes :
1. multiplier une colonne par un scalaire non nul,
2. échanger deux colonnes entre elles,
3. ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne.

Proposition 1 — Rappel sur les matrices élémentaires. Les opérations élémentaires peuvent se réaliser en multipliant à droite la matrice A par les matrices suivantes :
1. Les matrices de dilatation $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$
2. Les matrices de permutation $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
3. Les matrices de transvection $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ji}$

Les matrices élémentaires sont inversibles et leurs inverses sont elles-même des matrices élémentaires.

Proposition 2 — Rappel. Toute matrice inversible se décompose en produit de matrices élémentaires.

Proposition 3 Si E est une matrice élémentaire alors $\det A.E = \det A \det E$.

Proposition 4 Le déterminant d'un produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices.

Savoir faire 1 Preuve :
Soit B une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $\det AB = \det A \det B$.

Si B est inversible alors B se décompose en produit de matrices élémentaires notées $E_1, \dots, E_k$.

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(AE_1 \dots E_k) \\
&= \det(AE_1 \dots E_{k-1}) \det E_k \\
&\ \vdots \\
&= \det A \det E_1 \dots \det E_k
\end{aligned}$$

En particulier pour $A = I_n$, $\det B = \det E_1 \dots \det E_k$ et donc finalement $\det AB = \det A \det B$.

2. Si B n'est pas inversible alors les colonnes de B forment une famille liée et donc $\det B = 0$.
Le produit AB n'est pas non plus inversible. En effet $\operatorname{Ker} B \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker}(B) \subset \operatorname{Ker}(AB)$ d'où $\operatorname{Ker}(AB) \neq \{0\}$.
Finalement $\det(AB) = 0$.

2 Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 5 Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. On a alors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Savoir faire 2 **Preuve :**
Si $\det A \neq 0$ alors on a déjà montré que la famille formée des colonnes de A est libre. La matrice A est donc inversible.

Supposons maintenant que A inversible, alors $A.A^{-1} = I_n$ et donc $\det(A.A^{-1}) = \det I_n$ et enfin $\det A \times \det A^{-1} = 1$. $\det A$ est alors non nul et $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.