Déterminants

Déterminant de la transposée

1 Proposition

Proposition 1 Le déterminant d'une matrice élémentaire est égal au déterminant de sa transposée.

Savoir faire 1 Preuve.

Proposition 2 Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée.

Savoir faire 2 **Preuve :**
Si A est inversible, alors A s'écrit comme produit de matrices élémentaires $A = E_1 \times \cdots \times E_k$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \det {}^tA & = & \det {}^t(E_1 \times \cdots \times E_k) \\ & = & \det({}^tE_k \times \cdots \times {}^tE_1) \\ & = & \det({}^tE_k) \times \cdots \times \det({}^tE_1) \\ & = & \det(E_1) \times \cdots \times \det(E_k) \\ & = & \det(E_1 \times \cdots \times E_k) \\ & = & \det A \end{array}$$

Si A n'est pas inversible, alors ${}^tA$ ne l'est pas non plus (une matrice et sa transposée ont même rang) et $\det A = \det {}^tA = 0$.

Les conséquences de cette proposition sont les suivantes :

Proposition 3
1. Le déterminant est une forme n-linéaire alternée sur les lignes de la matrice.
2. Le déterminant change de signe lorsqu'on échange entre elles deux lignes de la matrice.
3. On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

2 Développement d'un déterminant

Proposition 4 On peut développer le déterminant de M par rapport à n'importe quelle ligne i de la matrice M de la façon suivante :

$$\det A = \sum_k = (-1)^{i+k} a_{i,k} \det A_{i,k}$$

Proposition 5 On peut développer le déterminant de M selon n'importe quelle colonne i de la matrice A de la façon suivante :

$$\det A = \sum_k = (-1)^{i+k} a_{k,i} \det A_{ki}$$