Déterminants

Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette partie f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 1 Deux matrices semblables ont même déterminant.

Savoir faire 1 Preuve

Si A et B sont des matrices de f exprimées dans des bases différentes alors $\det A = \det B$. Le déterminant de la matrice de f ne dépend donc pas de la base choisie. Cela justifie la définition suivante :

Définition 1 Le déterminant de f est égal au déterminant de sa matrice exprimée dans une base quelconque de E. Il est noté $\det f$.

Savoir faire 2 Déterminer le déterminant de $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array} \right.$

Savoir faire 3 $\mathbb{C}$ est ici considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Déterminer le déterminant de $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 3z+\bar{z} \end{array} \right.$

Savoir faire 4 Déterminer le déterminant de $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'+P(0) \end{array} \right.$

2 Déterminant d'une composée d'endomorphisme

Proposition 2 Si g est un autre endomorphisme de E, alors $\det(f\circ g) = \det f \times \det g$.

Savoir faire 5 Preuve

3 Caractérisation des automorphismes

Proposition 3 f est un automorphisme si et seulement si $\det f \neq 0$.

Savoir faire 6 Preuve.