Déterminants

Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette partie $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension n.

1 Définition

Définition 1 Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors le déterminant de $(f_1, \dots, f_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det\limits_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n)$ est défini par :

$$\det_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n) = \det M_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n).$$

Savoir faire 1 $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de la base canonique notée $\mathscr{B}$. On pose : $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X + 3$ et $P_3 = X^2 - 1$. Calculer le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base $\mathscr{B}$.

2 Caractérisation des bases

Proposition 1 Une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de E est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.

Savoir faire 2 La famille $((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

3 Lien avec le déterminant d'une application

Proposition 2 Si f est un endomorphisme de E alors $\det f = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.