Déterminants

Applications

1 Comatrice

Définition 1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ .On appelle comatrice de A la matrice $\text{com}(A)$ dont le coefficient générique d'indice (i, j) est $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Proposition 1 Pour toute matrice A inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} {}^t\text{com}(A)$

Savoir faire 1 Preuve

2 Application à la résolution de systèmes de Cramer

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,n}x_n & = b_1 \end{array}\right.$$

On pose également $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $C_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$

Proposition 2

1. Le système est un système de Cramer si et seulement si $\det A \neq 0$
2. Si le système est un système de Cramer alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det A}$$

Savoir faire 2 Preuve.

3 Déterminant de Vandermonde

Définition 2 Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde, le déterminant :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Proposition 3

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

4 Famille de vecteurs propres

Proposition 4 Une famille de k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Preuve :

[(Preuve en dimension finie en utilisant un déterminant de Vandermonde)] Par isomorphisme, il suffit de montrer que si A est une matrice carrée d'ordre n et que si $X_1,\dots,X_p$ sont p vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ distinctes, alors la famille $(X_1,\dots,X_p)$ est libre.

On pose $X_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{pmatrix}$, ... , $X_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$, ... , $X_p = \begin{pmatrix} x_{p,1} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{pmatrix}$.

Soit $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k + \dots + \alpha_p X_p$ une combinaison linéaire nulle des vecteurs propres $X_1,\dots,X_p$. En composant cette combinaison linéaire $p-1$ fois par A, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \alpha_1 X_1 + & \dots & +\alpha_k X_k + & \dots & +\alpha_p X_p & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 X_1 + & \dots & +\alpha_k \lambda_k X_k + & \dots & +\alpha_p \lambda_p X_p & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^{p-1} X_1 + & \dots & +\alpha_k \lambda_k^{p-1} X_k + & \dots & +\alpha_p \lambda_p^{p-1} X_p & = 0 \end{array}\right.$$

On a alors pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \alpha_1 x_{1,i} + & \dots & +\alpha_k x_{k,i} + & \dots & +\alpha_p x_{p,i} & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 x_{1,i} + & \dots & +\alpha_k \lambda_k x_{k,i} + & \dots & +\alpha_p \lambda_p x_{p,i} & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^{p-1} x_{1,i} + & \dots & +\alpha_k \lambda_k^{p-1} x_{k,i} + & \dots & +\alpha_p \lambda_p^{p-1} x_{p,i} & = 0 \end{array}\right.$$

Ce qui équivaut à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_p^{p-1} & \dots & \lambda_k^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_{1,i} \\ \vdots \\ \alpha_k x_{k,i} \\ \vdots \\ \alpha_p x_{p,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_p^{p-1} & \dots & \lambda_k^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$ étant une matrice de Vandermonde, le système est de Cramer et $\alpha_1 x_{1,i} = \dots = \alpha_k x_{k,i} = \dots = \alpha_p x_{p,i} = 0$.

L'égalité est vraie pour tout i, on a donc $\alpha_1 X_1 = \dots = \alpha_k X_k = \dots = \alpha_p X_p = 0$ et comme les vecteurs $X_1,\dots X_p$ sont non nuls, il vient $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$