# Réduction des endomorphismes

## Polynôme caractéristique

Dans ce cours, $u$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension $n$ et $M$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

## 1 Polynôme caractéristique d'une matrice

**Proposition 1** $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ est un polynôme de degré $n$ de terme dominant $\lambda^n$. Ses racines sont les valeurs propres de $M$. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de la matrice $M$.

**Savoir faire 1** **Preuve :**

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre de } M &\iff \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) - \{0\} : MX = \lambda X \\
&\iff \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\} \\
&\iff (M - \lambda I_n) \text{ non inversible} \\
&\iff \det(\lambda I_n - M) = 0 \\
&\iff \chi_M(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

**Savoir faire 2** Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

**Proposition 2** Si $M$ est une matrice triangulaire alors les valeurs propres de $M$ sont les valeurs situées sur sa diagonale

**Savoir faire 3** Preuve

**Proposition 3** Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Attention : la réciproque est fausse ! Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

**Définition 1** Si $M$ est la matrice de $u$ dans une base $\mathscr{B}$ de $E$, alors le polynôme $\det(XI_n - \lambda)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. $\chi_u(X) = \det(XI_n - \lambda)$ est appelé polynôme caractéristique de l'endomorphisme $u$.

**Savoir faire 4** Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de l'application

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-2x+2y, 3x-y) \end{array} \right.$$

## 3 Ordre de multiplicité d'une racine

**Définition 2** Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. On appelle multiplicité de $\lambda$, sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

**Théorème 4** Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ de multiplicité $\alpha$ et $d$ la dimension du sous-espace propre associé. Alors :

1. $d \leqslant \alpha$
2. si $d_1, \ldots, d_r$ sont les dimensions des sous-espaces propres de $u$, alors $d_1 + \cdots + d_r \leqslant \dim E$.

**Savoir faire 5** Preuve :

1. Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de $E_\lambda$. On complète cette base en une base $\mathscr{B}$ de $E$ :

$$\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \ldots, e_d}_{\text{base de } E_\lambda}, \underbrace{e_{d+1}, \ldots, e_n}_{\text{vecteurs ajoutés}})$$

Ecrivons la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & ? & \ldots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & ? & \ldots & ? \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \begin{vmatrix} X-\lambda & 0 & \ldots & 0 & ? & \ldots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X-\lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & ?-X & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & ? & \ldots & ?-X \end{vmatrix} \\ &= (X-\lambda)^d \begin{vmatrix} X-? & ? & \ldots & ? \\ ? & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ? \\ ? & \ldots & ? & X-? \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On en conclut que $(X-\lambda)^d$ divise $(X-\lambda)^\alpha$ et donc que $d \leqslant \alpha$.

2. On a $d_1 + \cdots + d_r \leqslant \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Or

$$\chi(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X-\lambda_r)^{\alpha_r} Q_1(X) \ldots Q_s(X)$$

avec $Q_1(X), \ldots, Q_s(X)$ des polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs. Puisque $\chi$ est un polynôme de degré $n$, on en conclut que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leqslant n$.