Réduction des endomorphismes

Diagonalisation

M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. u est un endomorphisme (d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension n) pour lequel on adopte les notations suivantes :

- χ_u est le polynôme caractéristique de u,
- $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres u,
- α_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i,
- d_i est la dimension du sous-espace propre E_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i.

1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 1 — Endomorphisme diagonalisable. On dit que u est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Proposition 1 u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle la matrice M de u est diagonale.

Proposition 2

$$u \text{ est diagonalisable} \iff d_1 + \cdots + d_p = n$$

Savoir faire 1 **Preuve :**

Supposons que $d_1 + \cdots + d_p = n$. Soit $(e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1})$ une base de E_1 ; ... ; $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ une base de E_i ; ... ; $(e_{p,1}, \dots, e_{p,d_p})$ une base de E_p. On va montrer que la réunion de ces bases est une base de E.
Posons donc

$$\mathscr{B} = (\underbrace{e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}}_{\text{base de } E_1}, \dots, \underbrace{e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i}}_{\text{base de } E_i}, \dots, \underbrace{e_{p,1}, \dots, e_{p,d_p}}_{\text{base de } E_p})$$

et écrivons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathscr{B}$:

$$\underbrace{k_{1,1}e_{1,1} + \cdots + k_{1,d_1}e_{1,d_1}}_{=v_1 \in E_1} + \cdots + \underbrace{k_{i,1}e_{i,1} + \cdots + k_{i,d_i}e_{i,d_i}}_{=v_i \in E_i} + \cdots + \underbrace{k_{p,1}e_{p,1} + \cdots + k_{p,d_p}e_{p,d_p}}_{=v_p \in E_p} = 0$$

Or *toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre*. Comme ici $v_1 + \cdots + v_p = 0$ il vient $v_1 = \cdots = v_p = 0$ [en effet : la famille $(v_1, \dots, v_p)$ n'est pas libre et donc au moins l'un des vecteurs n'est pas un vecteur propre et vaut 0. Quitte à renommer les vecteurs, supposons que ce soit v_p. Alors $v_1 + \cdots + v_{p-1} = 0$ et par récurrence descendante on montre bien que $v_1 = \cdots = v_p = 0$].
Par suite tous les scalaires $k_{i,j}$ sont nuls et la famille $\mathscr{B}$ est libre. Comme elle comporte $d_1 + \cdots + d_p = n$ vecteurs, c'est une base de E. Finalement, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Par définition u est diagonalisable.

2. Idée de la preuve : supposons que u soit diagonalisable et que $d_1 + \cdots + d_p < n$. Alors il n'est pas possible de former une famille libre comprenant n vecteurs propres...

Théorème 3 — CNS de diagonalisation. 1. Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E , alors

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_u \text{ n'a que des racines réelles} \\ \text{pour toute valeur propre } \lambda_i\text{, } dimE_{\lambda_i} = \alpha_i \end{cases}$$

2. Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, alors

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \text{pour toute valeur propre } \lambda_i\,,\, dimE_{\lambda_i} = \alpha_i$$

Proposition 4 — Condition suffisante de diagonalisation. Si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

2 Matrice diagonalisable

Définition 2 On dit que M est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}MP$.

Proposition 5 u est diagonalisable si et seulement si sa matrice M est diagonalisable.

Savoir faire 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A étant une matrice triangulaire, le polynôme caractéristique de A n'a que des racines réelles et les valeurs propres sont les coefficients situés sur la diagonale. On a donc :

— 1 valeur propre d'ordre de multiplicité $\alpha_1 = 1$ (on note E_1 le sous-espace propre associé).

— 2 valeur propre d'ordre de multiplicité $\alpha_2 = 2$ (on note E_2 le sous-espace propre associé).

E_1 est un sous-espace non réduit au vecteur nul donc $\dim E_1 \geqslant 1$. La dimension de E_1 est plus petite que l'ordre de multiplicité α_1 de la racine associée donc finalement $\dim E_1 = 1$.

De même $1 \leqslant \dim E_2 \leqslant \alpha_2 = 2$. La matrice A sera diagonalisable si et seulement si $\dim E_2 = 2$.

$E_1 = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à E_1 et forme à lui seul une base de ce sous-espace.

$E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $A - 2I$ est de rang 1, son noyau E_2 est donc de rang 2. Une base de E_2 est formée par les vecteurs $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons maintenant l'application canonique associée

$$u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a la relation $A' = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.