Réduction des endomorphismes

Trigonalisation

M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension n.

Définition 1
1. On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.
2. On dit que M est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 1 u est trigonalisable si et seulement si sa matrice M est trigonalisable.

Proposition 2 Si M est semblable à un matrice triangulaire T, alors les valeurs propres de M se trouvent sur la diagonale de T.

Proposition 3 — CNS de trigonalisation.
1. Une matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{R}$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique n'admet que des racines réelles.
2. Une matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{C}$ est toujours trigonalisable.

Preuve :
Admise

Savoir faire 1 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul montre que -1 est valeur propre d'ordre de multiplicité 2 et que 2 est valeur propre d'ordre de multiplicité 1. On note E_{-1} et E_2 les sous-espaces propres associés respectifs. E_2 est le sous-espace engendré par le vecteur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_{-1} est le sous-espace engendré par le vecteur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\dim E_1 \neq 2$ la matrice A n'est pas diagonalisable mais uniquement trigonalisable. Soit l'application

$$u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous allons donner deux formes trigonalisées :
1. La méthode la plus simple consiste à compléter la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en une base par l'ajout d'un troisième vecteur ε_3. La matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ sera de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   La matrice A' étant triangulaire, on retrouve les valeurs propres de A sur la diagonale et ainsi $\gamma = -1$. Les autres coefficients α et β sont solutions de système donné par l'équation :

$$A\varepsilon_3 = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

2. Une autre méthode consiste à déterminer ε_3' tel que la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3')$ soit de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \delta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est plus "joli" car le sous-espace engendré par la famille $(\varepsilon_2, \varepsilon_3')$ est alors stable par u. Pour trouver ε_3' il suffit de remarquer que :

$$A\varepsilon_3' = \delta\varepsilon_2 - \varepsilon_3'$$

donc que $(A+I)\varepsilon_3' = \delta\varepsilon_2$. Comme $\varepsilon_2 \in E_2$, $(A+I)\varepsilon_2 = 0$ et on a :

$$(A+I)^2\varepsilon_3' = 0$$

On recherche donc dans $\operatorname{Ker}(A+I)^2$ un vecteur non colinéaire à ε_2.