Réduction des endomorphismes

Applications

1 Calcul de A^n

Savoir faire 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Savoir faire 2 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2 Suites récurrentes

Savoir faire 3 On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n \end{array} \right.$$

Déterminer une matrice A telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Calculer A^n et en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Savoir faire 4 Soit a, b et c trois réels fixés. On définit par récurrence la suite (v_n) par : $v_0 = a$, $v_1 = b$, $v_2 = c$ et

$$\forall n > 0, v_{n+3} = \frac{v_n + v_{n+1} + v_{n+2}}{3}$$

Pour tout $n > 0$ on définit également le vecteur $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout $n > 0$, $V_{n+1} = AV_n$.
2. Montrer que 1 est valeur propre de A. Déterminer le spectre de A (ensemble de ses valeurs propres).
3. On désigne par 1, λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A. Montrer (sans les calculer) qu'il existe 3 nombres complexes α, β et γ tels que pour tout $n \geqslant 1$

$$v_n = \alpha + \beta\lambda_1^n + \gamma\lambda_2^n$$

3 Systèmes différentiels

Savoir faire 5 Résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' = & 4x - 2y + e^t \\ y' = & x + y + t^2 \end{array} \right.$$

Savoir faire 6 Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x' = & -x & -y & +z \\ y' = & -3x & +y & +z \\ z' = & -3x & +2y & \end{array}\right.$$

Savoir faire 7 On pose le système :

$$\left\{\begin{array}{rr} x' = & x-z \\ y' = & x+y+z \\ z' = & -x-y+z \end{array}\right.$$

1. La matrice du système est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que 2 est valeur propre et déterminer un vecteur propre ε_1 associé.
3. On pose $\varepsilon_2 = {}^t(0,1,1)$ et $\varepsilon_3 = {}^t(-1,2,0)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est un plan stable de A.
4. Ecrire le système dans la nouvelle base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
5. Terminer la résolution (indication : on pourra se ramener à une équation différentielle d'ordre 2).

Savoir faire 8 On considère l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y' - 6y = 0$$

On pose $u = y^{(2)}$ et $v = y'$. Déterminer un système différentiel vérifié par y, u et v. En déduire les solutions de l'équation.

4 Probabilités

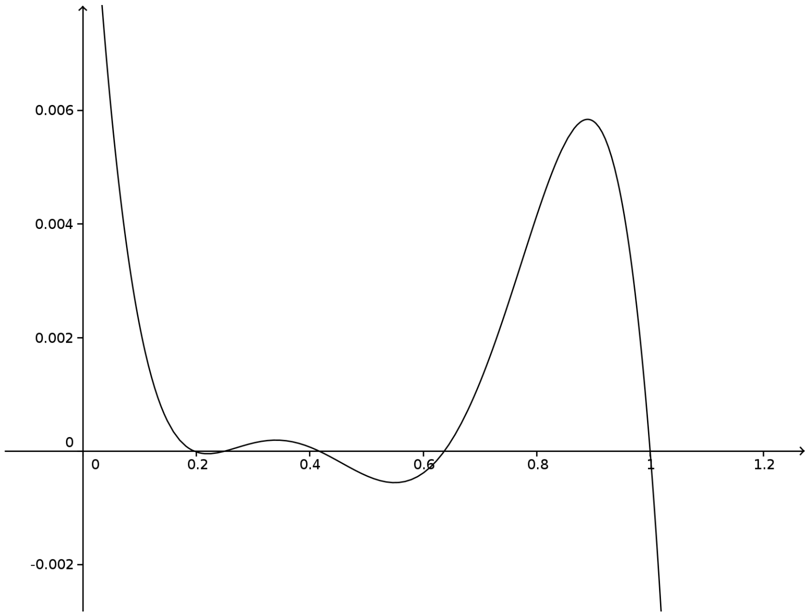
On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/8 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1/6 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

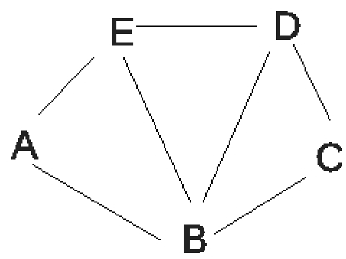
1. Etablir que M possède une valeur propre entière et trouver un vecteur propre associé e_1.
2. On admet que le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(X) = \frac{1}{1152}(-1152X^5 + 2880X^4 - 2632X^3 + 1100X^2 - 211X + 15)$$

. Quelle vérification peut-on faire pour vérifier ce résultat ?
Voici le graphe de χ :



3. Montrer que M est diagonalisable.
   On ne demande pas de trouver une matrice de passage P. Montrer que $(P^{-1}MP)^n$ possède une limite quand $n \to +\infty$.
4. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, la suite des vecteurs $M^n X$ tend vers une limite L qui est un vecteur colinéaire à e_1.
5. Lors de la nuit d'une école célèbre, dont la disposition des bars est schématisée ci-contre, un joyeux fêtard décide de faire le jeu suivant :
   (a) Il commence la soirée dans le bar A, prend une consommation, puis lance une pièce.
   (b) S'il obtient pile, il prend une consommation dans le même bar. Sinon, il sort, prend au hasard l'un des chemins qui se présentent à lui et entre dans le premier bar rencontré, où il prend une consommation. Puis il recommence.



Ainsi par exemple s'il est dans le bar E à un instant donné, il y a 1 chance sur 2 qu'il y soit encore à l'instant suivant, 1 chance sur 6 qu'il arrive au bar A, 1 chance sur 6 au bar B et 1 chance sur 6 au bar D.
Dans quel bar a-t-on le plus de probabilité de le retrouver à une heure avancée ?