Espaces pré-hilbertiens

Produit scalaire

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ou non.

Définition 1 — Produit scalaire. Une application $\langle.|.\rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x|y\rangle \end{array} \right.$ est un produit scalaire lorsqu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\langle.|.\rangle$ est bilinéaire
2. $\langle.|.\rangle$ est symétrique,
3. $\langle.|.\rangle$ est définie,
4. $\langle.|.\rangle$ est positive.

Définition 2 — Espace préhilbertien. Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Savoir faire 1 Soit $E=\mathbb{R}^n$, montrer que $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire.

Savoir faire 2 Soit $E=M_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que $\langle X|Y\rangle = {}^tXY$ est un produit scalaire.

Savoir faire 3 Soit $E=M_n(R)$, montrer que $\langle A|B\rangle = Tr({}^tAB)$ est un produit scalaire.

Savoir faire 4 Soit $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, montrer que $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Savoir faire 5 Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, montrer que $\langle f|g\rangle = f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ est un produit scalaire.

Savoir faire 6 Soit $E=\mathbb{R}^2$, les applications suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1. $<x|y> = x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$
2. $<x|y> = x_1y_1+x_1y_2+x_2y_2$
3. $<x|y> = x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$

Définition 3 — Norme associée à un produit scalaire. Soit $(E,<.|.>)$ un espace pré-hilbertien. L'application $||.|| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ u & \longmapsto & ||u|| = \sqrt{\langle u|u\rangle} \end{array} \right.$ est appelée norme associée au produit scalaire $\langle.|.\rangle$.

Savoir faire 7 Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que $\forall (u,v)\in E^2$, $2(u|v) = ||u+v||^2-||u||^2-||v||^2$
2. Montrer que $\forall (u,v)\in E^2$, $||u+v||^2+||u-v||^2 = 2(||u||^2+||v||^2)$