Espaces pré-hilbertiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 — Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien et $||.||$ la norme associée. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$|\langle x|y \rangle| \leqslant ||x||.||y||$$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Savoir faire 1 Preuve du théorème de Cauchy-Schwarz :

1. On pose $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$. Que dire du signe de $P(\lambda)$.
2. Montrer que P est un polynôme de degré 2 dont on précisera les coefficients.
3. Connaissant le signe de $P(\lambda)$ pour toute valeur de λ, que dire du signe du discriminant de P ? Conclure.
4. Montrer que si x et y sont liés, le discriminant est nul. Conclure.
5. Montrer que si le discriminant est nul, x et y sont liés. Conclure.

Proposition 2 Soit $(E, < .|. >)$ un espace pré-hilbertien et $||.||$ la norme associée au produit scalaire. Les trois propriétés suivantes sont réalisées :

1. $\forall u \in E\,,\, ||u|| = 0 \iff u = 0$
2. $\forall u \in E\,, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = |\lambda|.||u||$
3. $\forall (u,v) \in E^2\,,\, ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ (inégalité triangulaire)

Savoir faire 2 Preuve !

Savoir faire 3 Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$

Savoir faire 4 Soit $0 < a < b$. Montrer que pour f continue :

$$\frac{b^3-a^3}{3}\int_a^b f^2(t)dt \geqslant \left(\int_a^b tf(t)dt\right)^2$$

Savoir faire 5 Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Savoir faire 6 Montrer que $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\,,\, \sum_{i=1}^n x_i \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Savoir faire 7 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation $(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2 = \frac{1}{4}$