Espaces pré-hilbertiens

Orthogonalité

1 Famille orthogonale

Définition 1 — vecteurs orthogonaux. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux lorsque $\langle x|y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Savoir faire 1 Montrer que si x et y sont orthogonaux alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||x+\lambda y|| \geqslant ||x||$.

Définition 2 — famille orthogonale, famille orthonormale. Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale lorsqu'elle est formée de vecteurs orthogonaux deux à deux.
Une famille de vecteurs de E est dite orthonormale lorsqu'elle est orthogonale et formée de vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1).

Savoir faire 2

1. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$?
2. On pose

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto & (x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_1y_1+(x_2+x_3)(y_2+y_3) \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que φ est un produit scalaire.
   (b) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

Proposition 1 Une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

Savoir faire 3 Preuve !

Théorème 2 — Pythagore. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille orthogonale de E alors : $||u_1||^2+\dots+||u_n||^2 = ||u_1+\dots+u_n||^2$.

Savoir faire 4 Preuve !

Savoir faire 5 Pour $n=2$, montrer que $||x+y||^2 = ||x||^2+||y||^2 \iff x \perp y$. Montrer que l'équivalence est fausse dans le cas général.

2 Sous-espaces orthogonaux

Définition 3 — Orthogonal d'une partie. Soit X une partie non vide de E. On appelle orthogonal de X l'ensemble, noté $X^\perp$, des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteurs de X.

Savoir faire 6 Compléter : $X^\perp = \{y \in E \mid \dots\dots\}$ et $y \in X^\perp \iff \dots\dots$

Proposition 3 Soit X une partie non vide de E, alors : $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Savoir faire 7 Preuve !

Savoir faire 8 Soit F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E. Montrer que :

1. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
2. $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$

Savoir faire 9

1. Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, montrer que l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales est l'ensemble des matrices de diagonale nulle.
2. Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, montrer que l'orthogonal de l'ensemble des matrices proportionnelles à I_2 est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Définition 4 — Sous-espaces orthogonaux. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (x,y) \in F \times G, x \perp y$. On note alors $F \perp G$.