Espaces pré-hilbertiens

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

1 Projecteur orthogonal

Théorème 1 — Projecteur orthogonal. Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous-espace de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de F. L'application :

$$p_F : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \langle x | \varepsilon_i \rangle \, \varepsilon_i \end{array} \right.$$

est la projection de noyau $F^\perp$ et d'image F. On l'appelle projection orthogonale sur F.

Savoir faire 1 On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(3,2,1)$. Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur D ?

Savoir faire 2 **Preuve :**

Preuve du théorème : soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace de dimension finie de E et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormale de F.

Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2. Soit $x \in E$. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} (x|\varepsilon_i)\varepsilon_i$ et $z = x - y$.
   Montrer que $y \in F$ et que $z \in F^\perp$.
   En déduire que $E = F \oplus F^\perp$
3. Soit p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Pour tout x dans E, exprimer $p(x)$ et $s(x)$ à l'aide du produit scalaire et des ε_i.