Espaces pré-hilbertiens

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 1 — Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(e_1,\ldots,e_N)$ une famille libre de E. Il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$ telle que :

1. $\forall n \in \{1,\ldots,N\}, \mathrm{Vect}(e_1,\ldots e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\ldots \varepsilon_n)$
2. $\forall n \in \{1,\ldots,N\}, \langle e_n | \varepsilon_n\rangle > 0$

Savoir faire 1 $E = \mathbb{R}^3$. On pose $\langle x|y\rangle = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$. Montrer que $\langle .|.\rangle$ est un produit scalaire. A partir de la base canonique, former une base orthonormée.(Réponse : $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2,1,0)$, $\varepsilon_3 = \sqrt{2}(-1,-1/2,1)$).