Espaces pré-hilbertiens

Distance d'un point à un sous-espace

Définition 1 — distance à un sous-espace. Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous-espace de E et $x \in E$. On appelle distance de x à F la quantité :

$$\mathrm{dist}(x,F) = \inf_{y \in F} ||x-y||$$

Théorème 1 Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace de dimension finie de E. Soit p l'application qui à un vecteur associe sa projection orthogonale sur F. Alors $\mathrm{dist}(x,F) = ||x-p(x)||$.

Savoir faire 1 soit E un espace préhilbertien, $x \in E$ et F un sous-espace de dimension finie de E. Soit p l'application qui à un vecteur associe sa projection orthogonale sur F.

1. Vérifier que : $\forall y \in F, < x-p(x), y >= 0$.
2. Pour $x \in E$ et $y \in F$, vérifier que $x-p(x)$ et $y-p(x)$ sont orthogonaux.
3. Utiliser alors le théorème de Pythagore pour montrer que $||x-y||^2 \geq ||x-p(x)||^2$. Illustrer sur un dessin. En déduire que $\mathrm{dist}(x,F) = ||x-p(x)||$.

Savoir faire 2

1. Montrer que $< P|Q >= P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \{aX+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Calculer la distance entre le vecteur X^2 et le sous-espace F