Isométries

Groupe orthogonal

Définition 1 Un endomorphisme f de E est appelé isométrie lorsqu'il conserve la norme, c'est à dire : $(\forall x \in E\,,\, ||f(x)|| = ||x||)$

Définition 2 Les isométries sont encore appelées endomorphismes orthogonaux et l'ensemble des isométries d'un espace préhilbertien E et noté $\mathcal{O}(E)$.

Théorème 1 Soit f un endomorphisme de E alors : $f \in \mathcal{O}(E) \iff (\forall x \in E\,,\, \forall (x,y) \in E^2\,,\, < f(x)|f(y) > = < x|y >$

Savoir faire 1 Preuve.

Savoir faire 2 Montrer que les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes.

Savoir faire 3 Montrer qu'une symétrie orthogonale et un endomorphisme orthogonal. Est-ce le cas des projections orthogonales ?

Théorème 2 Soit f un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est orthogonal
2. toute base orthonormale est transformée par f en une base orthonormale.
3. il existe une base orthonormale de E qui est transformée par f en une base orthonormale.

Savoir faire 4 Preuve

Théorème 3 $\mathcal{O}(E)$ forme un groupe pour la loi $\circ$. C'est-à-dire :

1. $id_E \in \mathcal{O}(E)$
2. si f est dans $\mathcal{O}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
3. si f et g sont dans $\mathcal{O}(E)$ alors $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$.