Isométries

Matrices orthogonales

1 Définition et caractérisation

Définition 1 Une matrice Ω de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsqu'elle est la matrice, dans une base **orthonormale**, d'un endomorphisme orthogonal.
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 1 Ω est orthogonale si et seulement si : ${}^t\Omega\Omega = I_n$

Savoir faire 1 Preuve !
On montre d'abord que :
Ω est orthogonale si et seulement si : $\forall (X,Y) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, {}^tX({}^t\Omega\Omega)Y = {}^tXY$

Proposition 2 Ω est orthogonale si et seulement si les colonnes (resp. lignes) de Ω forment une b.o.n pour le produit scalaire usuel.

2 Propriétés

Proposition 3 Soit P une matrice de passage. P transforme une b.o.n en une b.o.n si et seulement si P est orthogonale.

Proposition 4 Toute matrice Ω de $O_n(\mathbb{R})$ est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

Savoir faire 2 Preuve.

Savoir faire 3 Montrer que $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et calculer A^{-1}.

Proposition 5 $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \det(\Omega) \in \{-1, 1\}$.

Savoir faire 4 Preuve.

Proposition 6 $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication.

Définition 2 On note $\mathscr{O}^+(n)$ l'ensemble des isométries dont le déterminant est positif.
On note $SO_n(E)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n dont le déterminant est positif.