Isométries

Cas des isométries de $\mathbb{R}^3$

1 Existence d'une direction invariante

Proposition 1 Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ possède toujours une valeur propre réelle.

Savoir faire 1 Preuve !

Proposition 2 Un isométrie de $\mathbb{R}^3$ admet toujours 1 ou -1 comme valeur propre.

Savoir faire 2 Preuve !

Proposition 3 Soit ε_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1 ou -1. Alors :

1. $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)^{\perp}$ est stable par f.
2. La matrice de f dans une base orthonormée $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Savoir faire 3 Preuve !

Proposition 4 Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Alors les cas possibles sont les suivants :

<table>
<tr><td></td><td>Dénomination</td><td>$dim(\text{Ker}\,(f-id_E))$</td><td>$dim(\text{Ker}\,(f+id_E))$</td><td>Expression dans une certaine base orthonormée</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rotations
($\det f = 1$)</td><td>Identité ($\theta = 0$)</td><td>3</td><td>0</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>rotation d'angle θ ($\neq 0, \pi$)</td><td>1</td><td>0</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>retournement ($\theta = \pi$)</td><td>1</td><td>2</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Composée d'une rotation et d'une réflexion
($\det f = -1$)</td><td>- identité ($\theta = \pi$)</td><td>0</td><td>3</td><td>$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>réflexion ($\theta = 0$)</td><td>2</td><td>1</td><td>$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>composition d'une réflexion et d'une rotation d'angle θ ($\neq 0, \pi$)</td><td>0</td><td>1</td><td>$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

Savoir faire 4 Vérifier que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est une isométrie et en donner les caractéristiques.

Savoir faire 5 Vérifier que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $B = \dfrac{-1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ est une isométrie et en donner les caractéristiques.

Savoir faire 6 Vérifier que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est une isométrie et en donner les caractéristiques.

Savoir faire 7 Donner la matrice, dans la base canonique, de la rotation d'axe dirigé par $u = (2, -2, -1)$ et d'angle θ donné par $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$.