Isométries

Etude des coniques

Définition 1 On considére le plan muni d'un repère (O, e_1, e_2). On appelle conique l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x,y) et qui vérifient l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ est appelé partie quadratique et $dx + ey$ partie linéaire.

Remarque En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, une conique se note sous forme matricielle :

$${}^tXAX + LX + f = 0$$

Définition 2 — Ellipse. Soit a_1 et a_2 des réels strictement positifs. La conique d'équation

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$

est appelée ellipse. Un paramétrage possible est $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$.

Définition 3 — Hyperbole. Soit a_1 et a_2 des réels strictement positifs. La conique d'équation

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$

est appelée hyperbole. Un paramétrage possible est $(x(t), y(t)) = (\pm \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$.

Savoir faire 1 Etudier la conique définie par l'équation

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$$