Courbes paramétrées

Introduction

1 Définitions

Définition 1 — Fonction vectorielle. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction vectorielle une application

$$\vec{F}:\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & \vec{F}(t)=(x_1(t),\dots,x_p(t)) \end{array}\right.$$

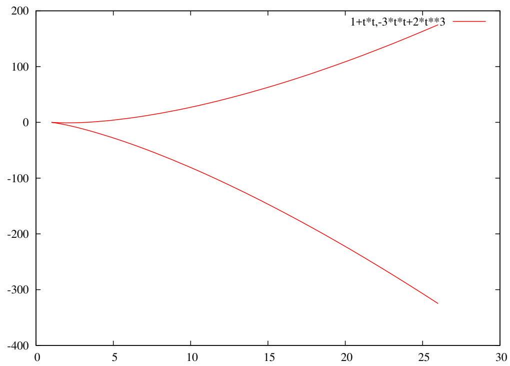
.

Définition 2 — Courbe paramétrée. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{F}:\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}\right.$.

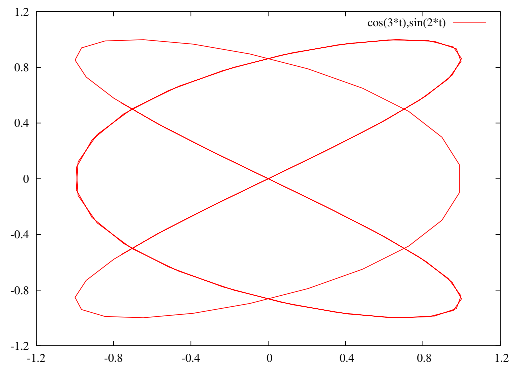
1. On appelle courbe paramétrée par $\vec{F}$ l'ensemble des points $\gamma=\{M(x(t),y(t))\mid t\in I\}$.
2. On dit que $\vec{F}$ est un paramétrage de γ.
3. On note souvent $M(t)=(x(t),y(t))$ et $\vec{F}(t)=\overrightarrow{OM(t)}$

2 Exemples

1. Paramétrage d'un cercle
2. Paramétrage d'une droite
3. $\left\{\begin{array}{ccc} x(t) & = & 1+t^2 \\ y(t) & = & -3t^2+2t^3 \end{array}\right.$



4. $\left\{\begin{array}{ccc} x(t) & = & \cos 3t \\ y(t) & = & \sin 2t \end{array}\right.$



3 Normes

Définition 3 — Norme d'un vecteur. Soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on appelle norme euclidienne de x le réel positif ou nul

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} {x_i}^2}$$

Proposition 1 Les trois propriétés suivantes sont réalisées :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^p \,,\, ||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^p \,,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \,,\, ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
3. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^p)^2 \,,\, ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire)

Savoir faire 1 Preuve dans le cas où $p = 2$.

Définition 4 — Distance euclidienne. Soit x et y dans $\mathbb{R}^p$, on appelle distance entre x et y le réel :

$$d(x,y) = ||x-y||$$

Proposition 2 Les trois propriétés suivantes sont réalisées :

1. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^p)^2 \,,\, d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^p)^2 \,,\, d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^p)^3 \,,\, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Savoir faire 2 Preuve

4 Limite d'une suite de $\mathbb{R}^2$

Définition 5 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On dit que U_n a pour limite $l = (l_1, l_2)$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\, \exists N \in N \,:\, \forall n \geqslant N \,,\, ||U_n - l|| < \varepsilon$$

Proposition 3 $U_n = (x_n, y_n, z_n) \to l = (l_1, l_2, l_3) \iff x_n \to l_1$ et $y_n \to l_2$ et $z_n \to l_3$

Savoir faire 3 **Preuve :**

Supposons que $(U_n) \to l$ et soit $\varepsilon > 0$. Posons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \,,\, ||U_n - l|| < \varepsilon$. Pour $n \geqslant N$, on a alors $|x_n - l_1| \leqslant \sqrt{(x_n - l_1)^2 + (y_n - l_2)^2 + (z_n - l_3)^2} = ||U_n - l|| < \varepsilon$. Donc $x_n \to l_1$. On montre de la même façon que $y_n \to l_1$ et $z_n \to l_3$.

2. Supposons maintenant que $x_n \to l_1$, $y_n \to l_1$ et $z_n \to l_3$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N_1 ,N_2 et N_3 tels que :

$$\forall n \geqslant N_1 \,,\, |x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

$$\forall n \geqslant N_2 \,,\, |y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

$$\forall n \geqslant N_3 \,,\, |z_n - l_3| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

Prenons $N = max(N_1, N_2, N_3)$ alors pour $n \geqslant N$:

$$(x_n - l_1)^2 + (y_n - l_2)^2 + (z_n - l_3)^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} = \varepsilon^2$$

et donc $||U_n - l|| < \varepsilon$.

5 Limite d'une fonction vectorielle

Définition 6 — Limite. Soit $\vec{F} : I \to \mathbb{R}^p$ et $l \in \mathbb{R}^p$. On dit que $\vec{F}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l$ si est seulement si, pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ qui tend vers t_0, on a $F(U_n)$ qui tend vers l.

Proposition 4 — Limite des fonctions coordonnées. Soit $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{array} \right.$.

$$\vec{F}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l = (l_1, \dots, l_p) \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i(t) \to l_i$$

Savoir faire 4 Preuve :

Preuve dans la cas ou $p = 3$.

Supposons $F(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l$. Alors, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers t_0, $F(t_n) = (x(t_n), y(t_n), z(t_n)) \to (l_1, l_2, l_3)$ et donc $x(t_n) \to l_1$. On en conclut que $x(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l_1$. On procède de même pour montrer que $y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l_2$ et $z(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l_3$.

2. Supposons que $x(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l_1$, $y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l_2$ et $z(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l_3$. Alors, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers t_0, $x(t_n) \to l_1$, $x(t_n) \to l_2$ et $x(t_n) \to l_3$. On en conclut que $(x(t_n), y(t_n), z(t_n)) \to (l_1, l_2, l_3)$ et donc que $F(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} l$.

6 Continuité

Définition 7 On dit que F est continue en t_0 si et seulement si $F(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} F(t_0)$

Proposition 5 F est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées sont continues.

7 Dérivabilité

Définition 8 On dit que $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 si et seulement si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

existe. On note alors $F'(t_0)$ sa limite.

Proposition 6 $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 si et seulement si ses fonctions coordonnées sont dérivables en t_0. On a de plus $F'(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_p'(t_0))$.