Courbes paramétrées

Réduction de l'intervalle d'étude

Voici quelques-unes des réductions les plus courantes :

1 Recherche d'une période

Soit F définie sur $\mathbb{R}$. Si T est la plus petite période commune à x et y, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = M(t+T)$ et on restreint l'étude à l'intervalle du type $[A, A+T]$

Savoir faire 1 Déterminer la période de : $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos 3t \\ y(t) & = & \sin 2t \end{array}\right.$. Conclusion ?

2 Etude des points $M(t)$ et $M(t+T)$

On suppose que l'ensemble de définition est un intervalle du type $[A, A+2T]$, lorsque le paramètre t varie entre A et $A+T$, $t+T$ varie entre $A+T$ et $A+2T$.

1. si $M(t)$ et $M(t+T)$ sont symétriques par rapport à O. alors on restreint l'étude à l'intervalle $[A, A+T]$ et on en déduit le reste de la courbe par une symétrie de centre O.
2. si $M(t)$ et $M(t+T)$ sont symétriques par rapport à (Ox) (resp. (Oy)) alors on restreint l'étude à l'intervalle $[A, A+T]$ et on en déduit le reste de la courbe par une symétrie d'axe (Ox) (resp. (Oy)).
3. si $M(t+T)$ s'obtient en appliquant à $M(t)$ une translation de vecteur $\vec{u}$ alors on restreint l'étude à l'intervalle $[A, A+T]$ et on en déduit le reste de la courbe par une translation de vecteur $\vec{u}$.
4. etc...

Savoir faire 2 On étudie la courbe $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos 3t \\ y(t) & = & \sin 2t \end{array}\right.$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
Que dire des points $M(t)$ et $M(t+\pi)$? Conclusion ?

3 Etude des points $M(t)$ et $M(2T-t)$

On suppose que l'ensemble de définition est un intervalle du type $[0, 2T]$, lorsque le paramètre t varie entre 0 et T, $2T-t$ varie entre $2T$ et T.

1. si $M(t)$ et $M(2T-t)$ sont symétriques par rapport à O. alors on restreint l'étude à l'intervalle $[0, T]$ et on en déduit le reste de la courbe par une symétrie de centre O.
2. etc...

Savoir faire 3 On étudie la courbe $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos 3t \\ y(t) & = & \sin 2t \end{array}\right.$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Que dire des points $M(t)$ et $M(\pi-t)$? Conclusion ?

Savoir faire 4 On étudie la courbe $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos 3t \\ y(t) & = & \sin 2t \end{array}\right.$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire apparaître la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ?
2. Comment peut-on alors réduire l'ensemble de définition ?
3. Enfin, comment se ramener à une étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

4 Etude des points $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$

On suppose que l'ensemble de définition est l'intervalle du type $]0, +\infty[$, lorsque le paramètre t varie entre 0 et 1, $\dfrac{1}{t}$ varie entre $+\infty$ et 1.

1. si $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$ sont symétriques par rapport à O. alors on restreint l'étude à l'intervalle $]0,1]$ et on en déduit le reste de la courbe par une symétrie de centre O.
2. etc...