Courbes paramétrées

Etude des points stationnaires

1 Vecteur tangent

Soit γ une courbe paramétré par $F(t) = (x(t), y(t))$ dont on suppose le point $F(t_0)$ stationnaire.

Proposition 1 En un point stationnaire, la tangente est dirigée par le premier vecteur dérivé $F^p(t_0)$ non nul.

Savoir faire 1 On considère la courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 1+t^2 \\ y(t) & = & -3t^2+2t^3 \end{array}\right.$ Donner sa tangente au point stationnaire.

2 Position de la courbe par rapport à la tangente

Soit γ une courbe paramétré par $F(t) = (x(t), y(t))$ Lorsque le point $M(t_0)$ est stationnaire, les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ en t_0 permettent d'obtenir l'allure de la courbe et sa position dans un repère local.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (t-t_0)^q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o((t-t_0)^q) \\ o((t-t_0)^q) \end{pmatrix} \right.$$

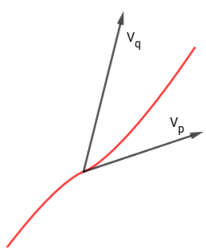
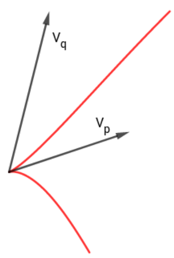
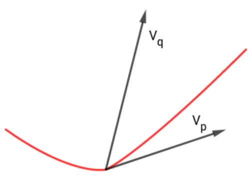
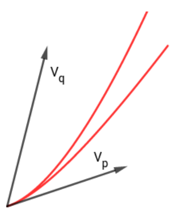
avec $\vec{V}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_p = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ non colinéaires.

Proposition 2 En gardant les notations précédentes :

$$M(t_0)M(t) = X(t)\vec{V}_p + Y(t)\vec{V}_q$$

avec $X(t) \underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^p$ et $Y(t) \underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^q$.

4 situations sont alors possibles selon les parités de p et q :

	p est impair	p est pair
q est impair	point d'inflexion 	point de rebrousement de première espèce 
q est pair	point ordinaire 	point de rebroussement de seconde espèce 

Savoir faire 2 On considère la courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1+t^2 \\ y(t) & = & -3t^2+2t^3 \end{array}\right.$ Faire l'étude le la courbe au point stationnaire.

Remarque Si $\vec{V}_p$ et $\vec{V}_q$ sont eux même colinéaires, alors on recherche le premier vecteur $\vec{V}_q'$ non colinéaire à $\vec{V}_p$.