Projecteurs et symétries

Projecteurs

Dans cette partie, E est un espace vectoriel. E_1 et E_2 sont des espaces supplémentaires dans E.

Définition 1 — Projecteur. La projection sur E_1 parallèlement à E_2 est l'application qui, à un vecteur x de E, associe sa composante sur E_1.

Autrement dit : $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$.

Savoir faire 1 Soit $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (a,0) \end{array} \right.$ est un projecteur.

Savoir faire 2 Soit $E_1 = \text{Vect}(1,1)$, $E_2 = \text{Vect}(0,1)$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Expliciter $p(a,b)$.

Proposition 1 Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Alors :

1. p est linéaire
2. $E_1 = \operatorname{Im} p$ et $E_2 = \operatorname{Ker} p$.

Savoir faire 3 Preuve !

Proposition 2 Soit $p : E \to E$. p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et $p \circ p = p$

Savoir faire 4 Preuve !

Savoir faire 5 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, -x-2y-z, 2x+4y+2z) \end{array} \right.$ Montrer que f est un projecteur et préciser ses caractéristiques.