Courbes et surfaces

Nappes paramétrées

Savoir faire 1 Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe de $\mathbb{R}^3$ régulière.

1. Donner un paramétrage de la droite tangente à la courbe au point $M(t_0)$.
2. Donner l'équation du plan normal à la courbe au point $M(t_0)$.

Définition 1 On appelle nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ la donnée d'une application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array} \right.$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points $M(u,v)$ est la surface associée à la nappe paramétrée.

Définition 2 Soit S une surface de classe $\mathscr{C}^1$. Un point $M(u,v)$ de S est dit régulier si et seulement si :

$$\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u,v), \frac{\partial M}{\partial v}(u,v) \right)$$

est libre.

Définition 3 En un point régulier $M(u,v)$, le plan tangent est le plan passant par $M(u,v)$ et dirigé par les vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v)$

Savoir faire 2 Soit S une surface régulière paramétrée par $M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. On considère un point $M(u_0, v_0)$ de la surface S.

1. Donner un vecteur directeur de la courbe paramétrée $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & M(u, v_0) \end{array} \right.$ au point $M(u_0, v_0)$.
2. Donner un vecteur directeur de la courbe paramétrée $\psi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v & \longmapsto & M(u_0, v) \end{array} \right.$ au point $M(u_0, v_0)$.
3. Donner l'équation du plan tangent à S au point $M(u_0, v_0)$.

Savoir faire 3 Soit (S) la surface paramétrée par $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^2 - v^2$.

1. Déterminer les points stationnaires de (S).
2. Déterminer une équation du plan tangent à (S) au point $A(1,5,3)$.

Savoir faire 4 Soit Σ la surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

1. Déterminer les points où le plan tangent est horizontal.
2. Déterminer et décrire géométriquement l'intersection de ce plan avec la surface Σ.
3. Décrire selon $a \in \mathbb{R}$ l'intersection du plan $z = a$ avec la surface Σ.