Courbes et surfaces

Surface définie par une équation cartésienne

Définition 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $F : \omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. L'ensemble des points $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$ est appelé surface d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$

Définition 2 Soit S la surface d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ où F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω. Le point M de coordonnées (x_0,y_0,z_0) est dit régulier si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(M), \dfrac{\partial F}{\partial y}(M), \dfrac{\partial F}{\partial z}(M)\right) \neq (0,0,0)$

Savoir faire 1 Soit $F : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & F(x,y) \end{array}\right.$ de classe $\mathscr{C}^1$, $S = \{(x,y,F(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

1. Rappeler l'équation du plan tangent à la surface S au point $(x_0,y_0,F(x_0,y_0))$.
2. On suppose que (x_0,y_0) est un point régulier et que $F(x_0,y_0) = 0$. En déduire l'équation de la tangente à C au point (x_0,y_0).
3. Soit $G : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & G(x,y,z) \end{array}\right.$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$. Quelle serait l'équation du plan tangent à D au point (x_0,y_0,z_0) ?

Définition 3 On appelle plan tangent à S au point M le plan passant par M et normal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M F$.

Savoir faire 2 Donner une équation du plan tangent à la surface (S) d'équation $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ au point A de coordonnées $(3,3,5)$.

Savoir faire 3 (S_1) et (S_2) sont les surfaces d'équations respectives $x^2 + y^2 - 2z = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

1. Déterminer le point $A(x,y,z)$ de $(S_1) \cap (S_2)$ tel que $z = \dfrac{1}{2}$ et $y > 0$.
2. Préciser la tangente en A à la courbe définie par $(S_1) \cap (S_2)$.