

## Courbes et surfaces

### Cônes et cylindres

**Définition 1** Soit  $\Gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^3$  admettant un paramétrage  $\gamma : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & M(t) \end{cases}$  et  $\vec{u}$  un vecteur non nul.

Alors la courbe paramétrée par  $C : \begin{cases} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) & \longmapsto & M(t) + \lambda \vec{u} \end{cases}$  est appelée cylindre de direction  $\vec{u}$  et de directrice  $\Gamma$ .

**Savoir faire 1** Donner une équation du cylindre  $C$  d'axe dirigé par  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  et de directrice  $\Gamma : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases}$

Réponse :  $X - Y + \cos Z - \sin Z = 0$

**Savoir faire 2** Donner une équation du cylindre  $\mathcal{C}$  circonscrit à la surface  $(\mathcal{S})$  d'équation  $z = x^2 + y^2$  dans la direction  $\vec{u}(1, 1, 0)$ .

Réponse :  $(X - Y)^2 - 2Z = 0$

**Définition 2** Soit  $\Gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^3$  admettant un paramétrage  $\gamma : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & M(t) \end{cases}$  et  $\Omega$  un point de  $\mathbb{R}^3$ . Alors

la courbe paramétrée par  $C : \begin{cases} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) & \longmapsto & \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M(t)} \end{cases}$  est appelée cône de sommet  $\Omega$  et de directrice  $\Gamma$ .

**Savoir faire 3** Soit  $\Gamma$  la courbe d'équations  $\begin{cases} z^2 + ax = a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$  et  $\Omega$  de coordonnées  $(a, 0, 0)$  avec  $a > 0$ . Déterminer une équation cartésienne du cône  $C$  de centre  $\Omega$  et de directrice  $\Gamma$ .

**Savoir faire 4** Donner une équation du cône de révolution de sommet  $O$ , d'axe la droite  $x = y = z$  et de demi-angle au sommet  $\pi/3$ .

**Définition 3** Une surface est réglée si et seulement si elle est engendrée par une famille de droites appelées génératrices. Autrement dit, cette surface admet un paramétrage du type :  $\begin{cases} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) & \longmapsto & A(t) + \lambda u(t) \end{cases}$