Intégrales impropres

Définition et premières propriétés

On considère ici que $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue (éventuellement $b = +\infty$).

1 Intégrale impropre

Comment définir l'intégrale sur des intervalles ouverts ou non bornés ?

Définition 1 — Intégrale impropre. La notation $\int_a^b f(t)dt$ est appelée intégrale impropre de f.

Exemple $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$, $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

Définition 2 — Convergence d'une intégrale impropre. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge lorsque la limite de $\int_a^x f(t)dt$ existe lorsque $x \to b$. La valeur de cette limite est alors notée $\int_a^b f(t)dt$.

Savoir faire 1 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$, $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

Définition 3 — Intégrale généralisée. Si $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale impropre convergente, alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale généralisée.

Interprétation géométrique : dans le cas d'une intégrale généralisée, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est donc finie.

2 Fausses intégrales généralisées

Savoir faire 2 $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$ est une fausse intégrale généralisée en 0.

3 Indifférence de la borne inférieure

Proposition 1 Soit $c \in]a,b[$. Alors les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.

4 Cas des intégrales impropres aux 2 bornes

Définition 4 Dans le cas ou $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ (éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale impropre aux deux bornes et que $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\forall c \in]a,b[$, $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

1. Pour montrer la convergence, l'existence d'une valeur particulière de c suffit.
2. $\int_{-x}^x t^3dt$ converge lorsque $x \to +\infty$ et pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Savoir faire 3 Etudier la convergence des intégrales suivantes : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$, $\int_0^{+\infty} \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$.

5 Somme d'intégrales généralisées

Proposition 2 Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

1. Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors $\int_a^b (f+g)$ converge.
2. Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge alors $\int_a^b (f+g)$ diverge.
3. Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ divergent alors on ne peut conclure quant à la nature de $\int_a^b (f+g)$.

Savoir faire 4 Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+2} dt$. Que dire de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt$?