Projecteurs et symétries

Symétries

Dans cette partie, E est un espace vectoriel. E_1 et E_2 sont des espaces supplémentaires dans E.

Définition 1 — Symétrie. La symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2 est l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$.

Proposition 1 s est la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2 si et seulement si $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$ est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Savoir faire 1 Preuve !

Proposition 2 Soit s la projection par rapport à E_1 et parallèlement à E_2. Alors :

1. s est linéaire
2. $E_1 = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.

Savoir faire 2 Preuve !

Proposition 3 Un endomorphisme $s : E \to E$ est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{id}_E$

Savoir faire 3 Preuve !

Savoir faire 4 On pose $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}((2,-1,0))$.

1. Etablir la matrice, dans la base canonique, de la projection sur F parallèlement à G.
2. En déduire la matrice, dans la base canonique, de la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
3. En déduire la matrice, dans la base canonique, de la symétrie par rapport à G et parallèlement à F.