Intégrales impropres

Théorèmes de convergence

1 Théorème de comparaison

Théorème 1 Soit $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ continues et positives telles que $f\leq g$.

1. Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.
2. Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et de plus $\int_a^b f\leq\int_a^b g$.

Savoir faire 1 Preuve : Soit $x\in[a,b[$. Pour $t\in[a,x]$, $f(t)\leq g(t)$ donc par croissance de l'intégrale $\int_a^x f(t)dt\leq\int_a^x g(t)dt$.

1. Supposons que $\int_a^b f$ diverge. Comme f est positive, $x\mapsto\int_a^x f$ est croissante et tend vers $+\infty$ lorsque $x\to b$. Or $\int_a^x f\leq\int_a^x g$, par comparaison $\int_a^x g$ tend également vers $+\infty$ lorsque $x\to b$. On a bien $\int_a^b g$ diverge.
2. Supposons que $\int_a^b g$ converge. Comme g est positive, $x\mapsto\int_a^x g$ est croissante et $\int_a^x f\leq\int_a^x g\leq\lim_{x\to b}\int_a^x g=\int_a^b g$. La fonction $x\mapsto\int_a^x f$ est elle même croissante et majorée donc elle converge.

Savoir faire 2 Etudier la convergence des intégrales suivantes : $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}dt$, $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2\ln(t)}dt$, $\int_2^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt$

2 Théorème d'équivalence

Théorème 2 Soit $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ continues et positives. Si $f\sim_b g$ alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Savoir faire 3 Preuve : Par définition de l'équivalence $\frac{f(t)}{g(t)}\to 1$ lorsque $t\to b$. Donc il existe $c\in[a,b[$ tel que $\forall t\in[c,b[$, $\frac{1}{2}\leq\frac{f(t)}{g(t)}\leq\frac{3}{2}$.

1. Supposons que $\int_a^b f$ converge. Comme $\frac{1}{2}g(t)\leq f(t)$, le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\int_c^b\frac{g}{2}$ converge. On en déduit que $\int_c^b g$ converge et par indifférence de la borne inférieure que $\int_a^b g$ converge.
2. Supposons que $\int_a^b f$ diverge. Le théorème de comparaison appliqué à l'inégalité $f(t)\leq\frac{3}{2}g(t)$ permets de conclure à la divergence de $\int_a^b g$.

Savoir faire 4 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2-1}dt$, $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}dt$, $\int_1^{+\infty}t\sin\left(\frac{1}{t^3}\right)dt$, $\int_0^1\frac{1}{\sin(t)}dt$