Intégrales impropres

Absolue convergence

On considère ici que $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ continue (éventuellement $b = +\infty$).

Proposition 1 — Convergence des intégrales à valeurs dans $\mathbb{C}$. $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent.

Définition 1 — Absolue convergence. On dit que $\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Définition 2 — Fonction intégrable. Lorsque l'intégrale $\int_a^b f$ est absolument convergente, on dit que f est intégrable.

Théorème 2 Une intégrale absolument convergente est convergente.

Savoir faire 1 Preuve !

Définition 3 — Semi-convergence. Une intégrale convergente et non absolument convergente est appelée semi-convergente.

Savoir faire 2

1. Intégrer par parties $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt$. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
2. En remarquant que, pour $t \in [1,+\infty[$, $\frac{\sin^2 t}{t} \leq \frac{|\sin t|}{t}$, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.
3. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.