Séries numériques

Rappels sur les séries

Dans ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Alors :

1. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée série de terme général U_n.
2. Cette série est encore notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} U_n$.
3. S_n est la somme partielle d'indice n de la série.

Définition 2 Soit $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$.

1. Une série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ convergente est une série dont la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ converge dans $\mathbb{K}$.
2. La limite de la somme partielle est appelée somme de la série, elle est notée $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$.

Définition 3 Si la série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge vers S, alors $R_n = S - \sum_{k=0}^{n} U_k$ est le reste à l'ordre n de la série. On le note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$.

Proposition 1 Si la série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge alors la suite (R_n) des restes tend vers 0.

Théorème 2 Si la série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge alors le terme général U_n de la série tend vers 0.

Exemple Une suite dont le terme général tend vers 0 n'est pas toujours convergente. Un exemple classique est la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ qui diverge bien que son terme général tende vers 0.

2 Séries particulières

Séries de Riemann

Proposition 3 La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$ et diverge pour tout $\alpha \leqslant 1$.

Séries géométriques

Proposition 4 — Séries géométriques. Soit $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ une série dont le terme général est de la forme $U_n = \alpha^n$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. La série est alors appelée série géométrique de raison α. Elle est convergente si et seulement si $|\alpha| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \frac{1}{1-\alpha}$$

Preuve :
Si $a \neq 1$, la somme partielle est égale à : $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

- si $|a| < 1$ alors $|a^{n+1}| = |a|^{n+1} \to 0$ et donc $S_n \to \frac{1}{1-a}$.
- si $|a| \geqslant 1$, la suite (a^n) ne converge pas vers 0, le critère nécessaire de convergence des séries n'est pas satisfait.

Séries télescopiques

Proposition 5 La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}(U_{n+1} - U_n)$ converge.

3 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Majoration des sommes partielles

Proposition 6 Une série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles S_n est majorée. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \sup_{n\geqslant 0} S_n$.

Critère de comparaison

Proposition 7 Soit $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} V_n$ deux séries à termes positifs. Si, à partir d'un certain rang n_0, $U_n \leq V_n$ alors :

1. $\sum_{n\geqslant 0} V_n$ converge implique que $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge.
2. $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ diverge implique que $\sum_{n\geqslant 0} V_n$ diverge.

Critère d'équivalence

Proposition 8 Soit $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ une série à termes positifs et (V_n) une suite équivalente à (U_n), alors :

1. à partir d'un certain rang, la suite (V_n) est positive.
2. les séries $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} V_n$ sont de même nature.

Preuve :

Idée : à partir d'un certain rang, la suite (U_n) est majorée par une suite géométrique de raison $\frac{l+1}{2}$.

4 Exercices pour réviser

Savoir faire 1 Etudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{lnn}{n}$,
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2 n}{2^n}$,
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^3}$,
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$,
5. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+2}$,
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{5^n-1}$,
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n+1}}{n}$
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{3+\sqrt{2n+1}}{1+3n+2n^2}$
9. $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{n+1}{n^2+1}$
10. $\sum_{n\geq 0} \frac{n\ln^2 n}{n^3+1}$
11. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$

Savoir faire 2 Montrer la divergence de la série harmonique $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ de trois façons différentes :

1. En étudiant $S_{2n} - S_n$.
2. En comparant S_n avec une intégrale.
3. En utilisant le fait que $\ln(n+1) - \ln n$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ en 0.

Savoir faire 3 La définition d'une **série alternée** est la suivante : on dit qu'une série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ est alternée lorsqu'il existe une suite de signe constant (V_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n V_n$.

Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n V_n$ une série alternée telle que (V_n) soit décroissante et de limite nulle. Montrer que les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n V_n$.

Application : donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$