Séries numériques

Critère de d'Alembert

Proposition 1 Soit $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ une série à termes positifs telle que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \to l$. Alors :

1. Si $l < 1$ la série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge.
2. Si $l > 1$ la série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ diverge grossièrement.
3. Si $l = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Savoir faire 1 Preuve : À partir d'un certain rang N, tout intervalle $]l-\eta, l+\eta[$ contient tous les termes de la suite $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

1. Supposons que $l > 1$ Il existe un rang N à partir duquel $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$. La suite (U_n) est strictement positive et croissante à partir du rang N et sa limite ne peut donc être nulle. La série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ est donc grossièrement divergente.
2. Supposons que $l < 1$, alors il existe un rang N à partir duquel $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{l+1}{2}$. D'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{N+k+1} \leq \frac{l+1}{2} U_{N+k}$ et par récurrence $U_{N+k} \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^k U_N$. La série de terme général $\left(\frac{l+1}{2}\right)^k U_N$ est une série géométrique de raison $\left(\frac{l+1}{2}\right) < 1$. Par comparaison avec une série géométrique, la série de terme général $U_N + k$ converge.

Savoir faire 2 Que dire du critère de d'Alembert appliqué aux séries de termes généraux suivants ?

1. $U_n = \frac{1}{n!}$
2. $U_n = \frac{1}{n}$
3. $U_n = \frac{1}{n^2}$
4. $U_n = \frac{2^n}{n^3}$
5. $U_n = \frac{n!}{n^n}$