Séries numériques

Comparaison avec une intégrale

1 Théorème de comparaison

Proposition 1 Soit $a \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ alors la série $\sum_{n \geqslant a} f(n)$ est de la même nature que l'intégrale $\lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Preuve :
Remarquons d'abord que, f étant positive, les suites de termes généraux $\int_a^{n+1} f(t)dt$ et $\sum_{k=a}^{n} f(k)$ sont croissantes et donc ne divergent que si (et seulement si) elles tendent vers $+\infty$. On a également $x \to \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ fonction croissante.

Soit $t \in [k, k+1]$ alors $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant entre k et $k+1$:

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k)$$

Puis en sommant entre a et n :

$$\sum_{k=a}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=a}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{n} f(k)$$

D'où :

$$\sum_{k=a}^{n} f(k+1) \leq \int_a^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{n} f(k)$$

1. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors par défintion $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$. Donc la suite de terme général $\int_a^{n+1} f(t)dt$ tend vers $+\infty$. Par minoration, la somme partielle $\sum_{k=a}^{n} f(k)$ tend également vers $+\infty$. On en déduit la divergence de la série $\sum_{n \geqslant a} f(n)$.
2. Par contraposée, si $\sum_{n \geqslant a} f(n)$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
3. Si la série $\sum_{n \geqslant a} f(n)$ diverge alors la suite de terme général $\sum_{k=a}^{n} f(k+1)$ tend vers $+\infty$. Par minoration, la suite de terme général $\int_a^{n+1} f(t)dt$ tend vers $+\infty$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.
4. Par contraposée, ...

Savoir faire 1 Montrer la divergence de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$.

2 Majoration du reste d'une série

Savoir faire 2 Combien faut-il calculer de termes à la série $\sum_{n > 0} \frac{1}{n^2}$ pour avoir une valeur approchée de sa somme à 10^{-1} près ?