Séries numériques

Séries absolument convergentes

1 Définition et propriété

Définition 1 — Séries absolument convergentes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dite absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |U_n|$ converge.

Proposition 1 Une série absolument convergente est convergente.

Savoir faire 1 Preuve : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ une série absolument convergente.

1. Cas des séries à termes dans $\mathbb{R}$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \frac{1}{2}(|U_n| + U_n)$ et $W_n = \frac{1}{2}(|U_n| - U_n)$. V_n et W_n sont positifs et majorés par $|U_n|$. D'après le critère de comparaison, $[V_n]$ et $[W_n]$ convergent. On a $U_n = V_n - W_n$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge car somme de séries convergentes.
2. Cas des séries à termes dans $\mathbb{C}$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la partie réelle de U_n et b_n sa partie imaginaire. On a pour tout n : $|a_n| \leqslant |U_n|$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est absolument convergente, par comparaison, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ l'est également. D'après la première partie de la démonstration $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. De façon analogue $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge également. Finalement $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge alors car combinaison linéaire de séries convergentes.

2 Séries semi-convergentes

Remarque Il existe des séries convergentes non absolument convergentes : par exemple $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée donc convergente, mais n'est pas absolument convergente.

Définition 2 — Série semi-convergente. Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

3 Exemples d'applications à l'étude de convergence

Savoir faire 2 La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$

Preuve :
Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $U_n = |\frac{z^n}{n!}|$. $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$ donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est une série absolument convergente et donc convergente.

Remarque On a également le résultat important suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Preuve :
Posons $f : t \mapsto e^t$ et fixons $x \in \mathbb{R}$, d'après l'égalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si x est négatif), il existe $c_n \in]0,x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_n)$$

et donc

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c_n}$$

Finalement $\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c_n}\right| \leqslant \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| max(1, e^x) \to 0$

Savoir faire 3 La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ converge.

Preuve :
$\left|\frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}-1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$.

Savoir faire 4 Etude de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n}$.

Preuve :
$\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n} = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^{n+1}\cos n}{n^{4/3}} + \frac{1}{n^{4/3}}\varepsilon(n)$. La série est la somme d'une série semi-convergente et de deux séries absolument convergentes.