Séries numériques

Produit de Cauchy

Définition 1 Le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} V_n$ est la série de terme général :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k}.$$

Proposition 1 Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} V_n$ sont absolument convergentes alors le produit de Cauchy de ces deux séries est également absolument convergent et est égal au produit de leurs sommes.

Savoir faire 1

1. Soit x et y deux réels, on pose $U_n = \frac{x^n}{n!}$ et $U_n = \frac{y^n}{n!}$. Calculer le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} V_n$. Vérifier que $e^x.e^y = e^{x+y}$.
2. Soit $a \in [0,1[$. Calculer $\left(\sum_{n\geqslant 0} a^n\right)^2$ et déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a^n$.