Séries entières

Rayon de convergence

1 Définition

Définition 1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$.

1. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est appelée série entière de coefficients a_n.
2. Aux points z où la série converge, la somme de la série est la fonction définie par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Remarque Une série entière est toujours définie en 0

Savoir faire 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudier la convergence le la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$

1. $a_n = 1$
2. $a_n = \dfrac{1}{n!}$
3. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$
4. $a_n = \dfrac{1}{n}$

2 Rayon de convergence

Proposition 1 — Lemme d'Abel. Si la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < \rho$.

Savoir faire 2 **Preuve :**

En effet :

$$|a_n z^n| = |a_n \rho^n| \times \left|\frac{z^n}{\rho^n}\right| \leqslant M \left|\frac{z}{\rho}\right|^n$$

Par comparaison avec une série géométrique de raison $\left|\dfrac{z}{\rho}\right| < 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est bien absolument convergente.

Théorème 2 Pour toute série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ il existe un unique réel $R \geqslant 0$ (éventuellement $R = +\infty$) tel que :

1. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < R$.
2. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est grossièrement divergente pour tout z tel que $|z| > R$.

R est appelé **rayon de convergence** de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Remarque L'étude est à faire au cas par cas pour $|z| = R$.

Savoir faire 3 **Preuve :**

On pose $A=\{\rho \geqslant 0 \mid (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$. A est une partie non vide car $0 \in A$.

1. Si A n'est pas majorée : soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|z|$ n'est pas un majorant de A et donc il existe $\rho \in A$ tel que $|z| < \rho$. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.
2. Si A est majorée : on pose $R = \sup A$.
   (a) R est le plus petit des majorants, donc si $|z| < R$ alors $|z|$ n'est pas un majorant de A. Il existe alors $\rho \in A$ tel que $|z| < \rho$. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.
   (b) si $|z| > R$ alors $a_n|z|^n$ est non bornée donc ne tend pas vers 0. De même $a_n z^n$ ne tend pas vers 0.

Savoir faire 4 En appliquant le théorème précédent, donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{z^n}{n}$
2. $\sum \frac{z^n}{n!}$
3. $\sum z^n$

3 Méthodes

On note ici R_a le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et R_b le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$

Proposition 3 Si $|a_n| \geqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang alors $R_a \leqslant R_b$.

Savoir faire 5 Preuve !

Savoir faire 6 Déterminer le rayon de convergence R_a dans le cas où $a_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Proposition 4 Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Savoir faire 7 Déterminer le rayon de convergence R_a dans les cas suivants :

1. $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
2. $a_n = \sin\left(e^{-n}\right)$

Proposition 5 Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l$ alors $R_a = \frac{1}{l}$.

Savoir faire 8 Utiliser soit la proposition précédente soit le critère de d'Alembert pour déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{z^n}{n^2}$
2. $\sum n z^n$
3. $\sum a^n z^n$ avec $a \in \mathbb{C}$
4. $\sum a_n z^n$ avec $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$

Proposition 6 Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant}(a_n+b_n)z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a,R_b)$.

Savoir faire 9 Déterminer le rayon de convergence R_a dans le cas où $a_n=4^n+5^n$.