Projecteurs et symétries

Famille de projecteurs associés à une somme directe

E est un espace vectoriel de dimension finie et $E_1 \dots E_p$ sont des sous-espaces de E.

Définition 1 — Somme de s.e.v. L'ensemble $\sum_{k=1}^{p} E_k$ défini par :

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \{x_1 + \cdots + x_p \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in E_i\}$$

est appelé somme des sous-espaces $E_1, \dots, E_p$.

Définition 2 — Somme directe. On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est directe lorsque tout vecteur de $\sum_{k=1}^{p} E_k$ admet une décomposition unique en une somme de vecteurs de $E_1, \dots, E_p$.

On note alors $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$

Définition 3 — Espaces supplémentaires. On dit que les sous-espaces $E_1, \dots, E_p$ sont supplémentaires dans E lorsque $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$

Proposition 1 — Décomposition du vecteur nul. On suppose que $E = \sum_{k=1}^{p} E_k$. Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0.$$

Autrement dit, les sous-espaces sont supplémentaires si et seulement si la décomposition du vecteur nul en sommes d'éléments de $E_1, \dots, E_p$ est unique.

Savoir faire 1 Preuve !

Proposition 2 — Base adaptée. Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces supplémentaires de E de bases respectives $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n$. Alors la famille $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n)$ est une base de E. On l'appelle base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Savoir faire 2 Preuve !

Définition 4 Soit $E_1, \dots, E_k$ des sous-espaces de E supplémentaires. On note p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{i \neq j} E_j$. La famille $(p_1, \dots, p_k)$ est appelée famille de projecteurs associée à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$

Proposition 3 Si $(p_1, \dots, p_k)$ est une famille de projecteurs associée à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ alors :

1. pour tout i, $p_i^2 = p_i$,
2. pour tout $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$,
3. $p_1 + \cdots + p_k = id_E$.

Savoir faire 3 $E_1 = \text{Vect}(1,1)$, $E_2 = \text{Vect}(0,1)$. Expliciter p_1 et p_2. Vérifier que $p_1 \circ p_2 = 0$ et $p_1 + p_2 = id_E$.

Savoir faire 4 $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$, $G = \text{Vect}(1,-1,1,-1)$ et $H = \text{Vect}(1,1,-1,-1)$.

1. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.
2. Ecrire les matrices dans la base canonique des projections associées à la décomposition $E = F \oplus G \oplus H$. Ecrire les matrices de ces projections dans une base adaptée.