Séries entières

Séries entières à variable réelle

Dans cette partie, on considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$. Son rayon de convergence est noté R et on note $S : \left\{ \begin{array}{rcl}]-R;R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$.

1 Théorème de continuité

Proposition 1 La fonction somme définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur son intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$.

2 Théorème de dérivation

Proposition 2 La fonction somme définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R;R[$. De plus :

$$\begin{aligned}
\forall k \in N,\, S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n
\end{aligned}$$

Savoir faire 1 On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$.
2. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = S(x)$ et $S(0) = 1$.
3. En déduire l'expression de $S(x)$.

Savoir faire 2 On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n}$. On pose R son rayon de convergence et S sa somme.

1. Montrer que $R = +\infty$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S''(x) + xS'(x) + S(x) = 0$.

Proposition 3 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ deux séries entières et $r > 0$. Alors :

$$\left\{ \forall x \in]-r,r[,\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right\} \Rightarrow \{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n\}$$

Savoir faire 3 Preuve

Savoir faire 4 Rechercher une série entière solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy + y' + xy'' = 0 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

3 Théorème d'intégration

Proposition 4 La primitive qui s'annule en 0 de la série entière de somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R;R[$ est $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$

Savoir faire 5 Ecrire les fonctions suivantes comme somme d'une série entière :

1. $\ln(1-x)$
2. $\arctan x$

4 Théorème de continuité au bord du disque de convergence

Proposition 5 Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ converge alors S est continue au point R.

Savoir faire 6 En considérant la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, montrer que $\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$