Séries entières

Fonctions développables en série entière

1 Définition

Définition 1 Une application f est dite développable en série entière lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon R et $r \leqslant R$ tels que :

$$\forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

2 Utilisation des théorèmes de dérivation, etc..

Savoir faire 1 Donner les développement en série entières des fonctions suivantes suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (en dérivant la précédente)
3. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)}$
4. $f(x) = \arctan x$

3 Utilisation d'une équation différentielle

Savoir faire 2 Déterminer le en série entière de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$ remarquant que cette fonction vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (1+x)y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Savoir faire 3

1. Déterminer une équation différentielle dont $\operatorname{ch} x$ est solution. En déduire son DSE.
2. Vérifier ce résultat :
   (a) en utilisant le DSE de e^x et en remarquant que $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   (b) en retrouvant, à l'aide de la série entière, les dérivées successives en 0.

4 Utilisation d'une formule de Taylor

Savoir faire 4 En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, déterminer les DSE de $\cos x$ et $\sin x$.