Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Distances et ouverts de $\mathbb{R}^p$

Définition 1 — Rappel : Norme d'un vecteur. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on appelle norme euclidienne de x le réel positif ou nul

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i{}^2}$$

Définition 2 — Rappel : Distance euclidienne. Soit x et y dans $\mathbb{R}^p$, on appelle distance entre x et y le réel :

$$d(x,y) = ||x - y||$$

Définition 3 — Boule ouverte de $\mathbb{R}^p$. Dans $\mathbb{R}^p$ (muni de la norme euclidienne), la boule ouverte de centre a et de rayon r est définie par :

$$\mathscr{B}(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid d(a,u) < r\}$$

Définition 4 — Ouverts de $\mathbb{R}^p$. Une partie Ω de $\mathbb{R}^p$ est ouverte si et seulement tout point de Ω est centre d'une boule ouverte incluse dans Ω. Autrement dit :

$$\forall x \in \Omega\,,\, \exists r > 0\,,\, B(x,r) \subset \Omega$$

Savoir faire 1 Les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:

1. $D_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$
2. $D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
3. Une boule ouverte.
4. $D_4 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$

Définition 5 — Fermés de $\mathbb{R}^p$. Une partie F de $\mathbb{R}^p$ est fermée lorsque son complémentaire dans $\mathbb{R}^p$ est un ouvert.

Savoir faire 2

1. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
2. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 6 — Parties bornées de $\mathbb{R}^p$. Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule.

Savoir faire 3 Représenter les ensembles suivants et montrer que ce sont bien des parties bornées. Sont-elles fermées ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) \leqslant 1\}$

Définition 7 — Point intérieur, point extérieur, point adhérent, frontière. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$.

1. On dit que x est un point intérieur de A s'il existe une boule ouverte, centrée en x et contenue dans A.

2. On dit que x est un point extérieur de A s'il existe une boule ouverte centrée en x qui ne rencontre pas A.
3. On dit que x est un point adhérent à A si toute boule centrée en x rencontre A.
4. La frontière de A est l'ensemble de tous les points adhérents qui ne sont pas des points intérieurs.

Savoir faire 4
1. On considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x+y < 1\}$. Représenter cet ensemble. Le point $(0,0)$ est-il un point intérieur à A ? Justifier.
2. On considère l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\, x^2+y^2 < 1\}$. Représenter cet ensemble. Le point $(0,1)$ est-il un point extérieur à B ? Justifier.

Savoir faire 5 On considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq \sqrt{1-y^2}\}$. Donner l'ensemble des points intérieurs, extérieurs, adhérents ainsi que la frontière de A.