Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Continuité et limites

Définition 1 — Limite. Soit f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers z_0 lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0) lorsque : Pour toute suite (x_n,y_n) qui tend vers (x_0,y_0), $f(x_n,y_n)$ tend vers z_0.

Définition 2 — Continuité. Soit f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $(x_0,y_0) \in A$ lorsque $f(x,y)$ tend vers $f(x_0,y_0)$.

Ces définitions se généralisent aux fonctions de p variables.

Savoir faire 1 Les fonctions suivantes sont-elles continues en $(0,0)$

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$

Définition 3 On dit que f est continue sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est continue en tout point de A.

Proposition 1 La somme et le produit de fonctions continues sont continus.
Si f est continue en a et si g est continue en a avec $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

La proposition suivante se généralise facilement aux fonctions de p variables.

Proposition 2 — Continuité des applications partielles. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f continue sur $I \times J$.
Si f est continue en $(x_0,y_0) \in I \times J$, alors :

1. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right.$ est continue en x_0
2. $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$ est continue en y_0

Mais φ et ψ continues n'implique pas que f est continue.

Savoir faire 2 Montrer que les applications partielles de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$ sont continues en 0 et que pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$