Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Calcul différentiel

Définition 1 — Dérivées partielles. On appelle dérivée partielle de f selon la i-ème variable x_i en $(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_p)$ la limite suivante (lorsqu'elle existe) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_i+t,\dots,a_p) - f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_p)}{t}.$$

Définition 2 — Fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω.

Savoir faire 1 La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}\right.$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

Théorème 1 — Développement limité à l'ordre 1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ et si $a = (a_1,\dots,a_p) \in \Omega$ alors

$$f(a_1+h_1,\dots,a_p+h_p) = f(a_1,\dots,a_p) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_p) + ||(h_1,\dots,h_p)||\varepsilon(h_1,\dots,h_p)$$

avec $\displaystyle\lim_{(h_1,\dots,h_p)\to(0,\dots,0)} \varepsilon(h_1,\dots,h_p) = 0.$

Proposition 2 — Dérivée d'une fonction composée. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_p) \end{array}\right.$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & (u_1(t),\dots,u_p(t)) \end{array}\right.$ avec les applications u_i $\mathscr{C}^1$ sur I alors, en posant $g = f \circ \varphi$, on a pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{p} u_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_1(t),\dots,u_p(t))$$

Savoir faire 2 **Preuve :**

On applique le théorème des accroissements finis aux fonctions u et v sur l'intervalle $[t,t+h]$: il existe c et d dans $]t,t+h[$ tels que :

$u(t+h) = u(t) + hu'(c)$
$v(t+h) = v(t) + hv'(d)$

f est de classe $\mathscr{C}^1$, elle admet donc un DL à l'ordre 1 et

$$\begin{array}{rcl} g(t+h) & = & f(u(t+h),v(t+h)) \\ & = & f(u(t)+hu'(c),v(t)+hv'(d)) \\ & = & f(u(t),v(t))+hu'(c)\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))+hv'(d)\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))+||(hu'(c),hv'(d)||\varepsilon(hu'(c),hv'(d)) \end{array}$$

On regarde maintenant le taux d'accroissement :

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=u'(c)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))+v'(d)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))+\sqrt{(u'(c))^2+(v'(d))^2}\varepsilon(hu'(c),hv'(d))$$

Lorsque $t\to 0$:

c et d tendent vers t,

u' et v' étant continues, $u'(c)\to u'(t)$ et $v'(c)\to v'(t)$

$\sqrt{(u'(c))^2+(v'(d))^2}\to\sqrt{(u'(t))^2+(v'(t))^2}$

$hu'(c)\to 0$, $hv'(d)\to 0$ et donc $\varepsilon(hu'(c),hv'(d))\to 0$

Finalement : $\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}\to u'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))+v'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$.

Savoir faire 3 On pose $f(x,y)=x^2+y^2$, $u(t)=a\cos t$ et $v(t)=b\sin t$. Calculer la dérivée de $f(u(t),v(t))$.

Définition 3 Le plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ est le plan d'équation :

$$z=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Cette définition est justifiée par le fait que le vecteur tangent en t_0 d'une courbe paramétrée par $M(t)=(x(t),y(t),f(x(t),y(t$ est inclus dans le plan tangent à la surface en $M(t_0)$.

Savoir faire 4 A montrer !