Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 1 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U. Si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont de classe $\mathscr{C}^1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Définition 2 On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. De même, on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Théorème 1 — Schawrz. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Savoir faire 1 Soit l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

1. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
2. Les deux fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont-elles continues en $(0,0)$?