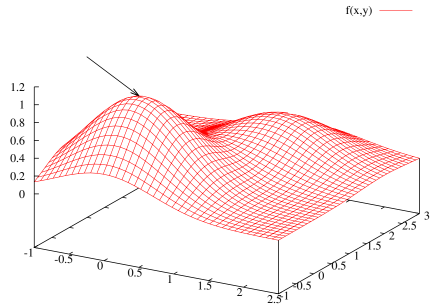
Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Recherche d'extrema sur un ouvert

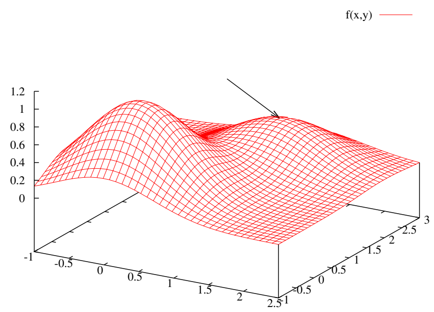
1 Définitions



Définition 1 — Extremum global. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f : A \to \mathbb{R}$ admet un minimum (resp. maximum) global en $a \in A$ si et seulement :

$$\forall x \in A\,,\ f(x) \geqslant f(a)$$

(resp. $f(x) \leqslant f(a)$).



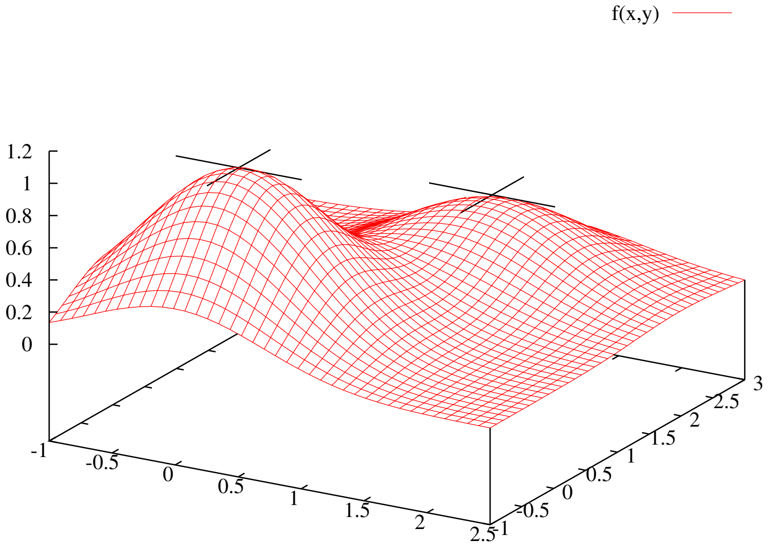
Définition 2 — Extremum local. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f : A \to \mathbb{R}$ admet un minimum (resp. maximum) local en $a \in A$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathscr{B}(a,r)\,,\ f(x) \geqslant f(a)$$

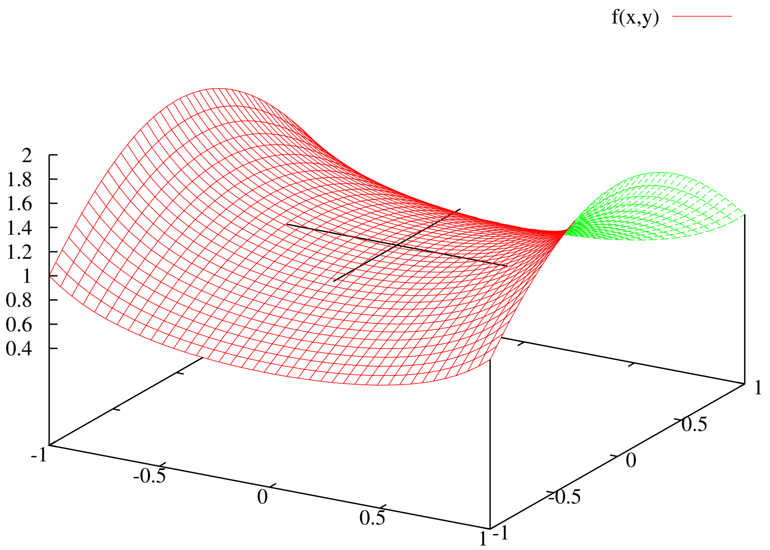
(resp. $f(x) \leqslant f(a)$).

Définition 3 On appelle point critique un point où les dérivées partielles s'annulent.

Théorème 1 Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, définie sur un ouvert, admet un extremum local en a alors a est un point critique.



Attention : les dérivées partielles peuvent s'annuler sans que f admette un extremum.



Savoir faire 1 Etudier en $(0,0)$ la présence éventuelle d'extremums locaux pour les fonctions suivantes (on évitera tout calcul inutile) :

1. $f(x,y) = x+y+x^2+y^2$
2. $g(x,y) = x^4+y^4$
3. $h(x,y) = x^3y^3$
4. $k(x,y) = x^2+y^2+xy$
5. $l(x,y) = x^3+x^2+y^2$

6. $m(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$