Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Recherche d'extrema sur des ensembles compacts

Théorème 1 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

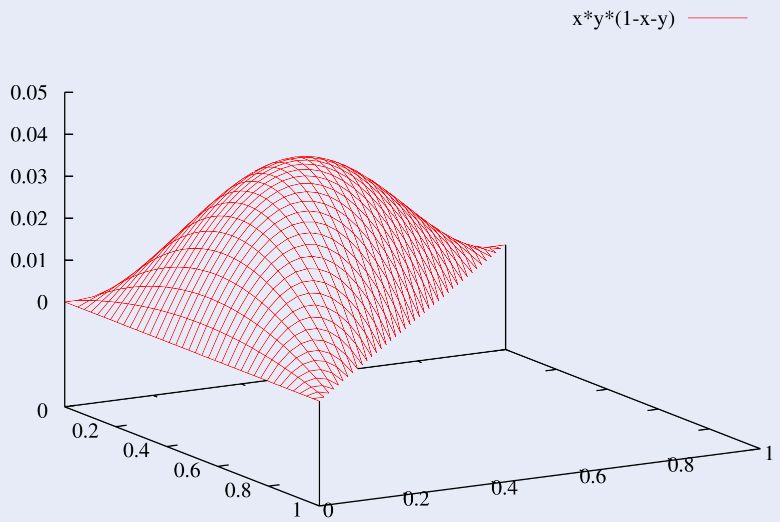
Stratégie d'étude :

1. $K = \underbrace{\overset{\circ}{K}}_{\text{ouvert}} + \underbrace{\partial K}_{\text{bord}}$
2. On cherche les points critiques sur $\overset{\circ}{K}$
3. On cherche les extrema sur ∂K
4. Parmi tous les points précédents, on cherche celui correspondant au minimum et au maximum sur K.

Savoir faire 1 Rechercher les extrema globaux de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y(4-x-y) \end{array} \right.$ avec $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 6\}$.

Savoir faire 2 Déterminer le maximum du produit xyz lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ et } z \geqslant 0 \\ x+y+z = a \text{ (avec } a > 0) \end{array} \right.$$



Savoir faire 3 On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2-x-y+\frac{1}{2} \end{array} \right.$ où K est le disque fermé de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

1. Compléter le paramétrage suivant pour que ce soit un paramétrage du bord de K :

$$\begin{cases} x(t) = & 1+\cos(t) \\ y(t) = & \dots \end{cases}$$

   Que représente t ? Faire un schéma.
2. Etudier les extremums globaux de f.

Savoir faire 4 Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$

1. Représenter D et trouver un paramétrage de Γ le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ
5. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D