Éléments propres

Éléments propres d'une matrice

Dans cette partie M est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1 Définition

Définition 1 — Vecteur propre. On dit que $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de M si $X \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$

Définition 2 — Valeur propre. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$

Savoir faire 1 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs suivants sont des vecteurs propres et déterminer les valeurs propres associées :
$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Définition 3 — Sous-espace propre. Soit λ une valeur propre de M. On pose

$$E_\lambda = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}$$

E_λ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est donc formé de l'ensemble des vecteurs propres auquel on ajoute le vecteur nul.

Savoir faire 2 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 est valeur propre. Déterminer E_0.

Savoir faire 3 En reprenant L'énoncé du savoir faire 1, déterminer le sous-espace propre associé à $\lambda = 1$

2 Propriétés

Proposition 1
1. λ est une valeur propre de M si et seulement si $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$.
2. λ est une valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Savoir faire 4 Preuve !

Proposition 2 $E_\lambda = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)$. E_λ est donc un sous-espace vectoriel.

Savoir faire 5 Preuve !

Savoir faire 6 Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de M et le produit $M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En déduire deux valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

Proposition 3 M est de la forme

$$M=\begin{pmatrix} ? & & & 0 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & ? & 0 & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & 0 & ? & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & ? \end{pmatrix}$$

si et seulement si $e_j=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ

Savoir faire 7 Pour les matrices suivantes, donner des vecteurs propres et des valeurs propres "évidents" :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$