Fonctions de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Utilisation des DL à l'ordre 2

Théorème 1 — Schwarz. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Théorème 2 — Développement limité à l'ordre 2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et si $(x,y) \in \Omega$ alors :

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= f(x,y) \\ &+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)\right) \\ &+(h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$.

Définition 1 La matrice $H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) \end{pmatrix}$ est appelée matrice hessienne de f au point (x,y).

Théorème 3 Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que $(0,0)$ est un point critique alors :

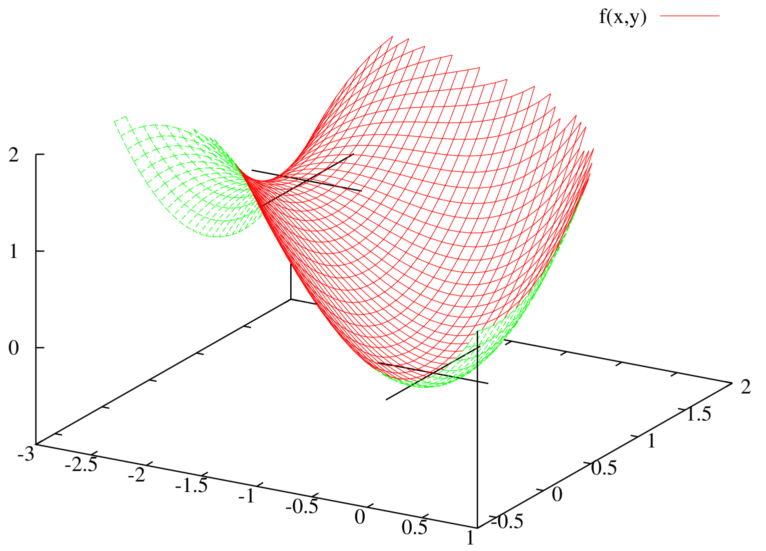
1. Si les valeur propres de la matrice H sont toutes deux strictement positives, on est en présence d'un minimum.
2. Si les valeur propres de la matrice H sont toutes deux strictement négatives, on est en présence d'un maximum.
3. Si les valeurs propres de H sont non nulles et de signes opposés, il n'y a pas d'extremum et on est en présence d'un point selle.
4. Si l'une des valeurs propres est nulle, on ne peut pas conclure.

Savoir faire 1 Donner la nature du point critique en fonction du determinant de H.

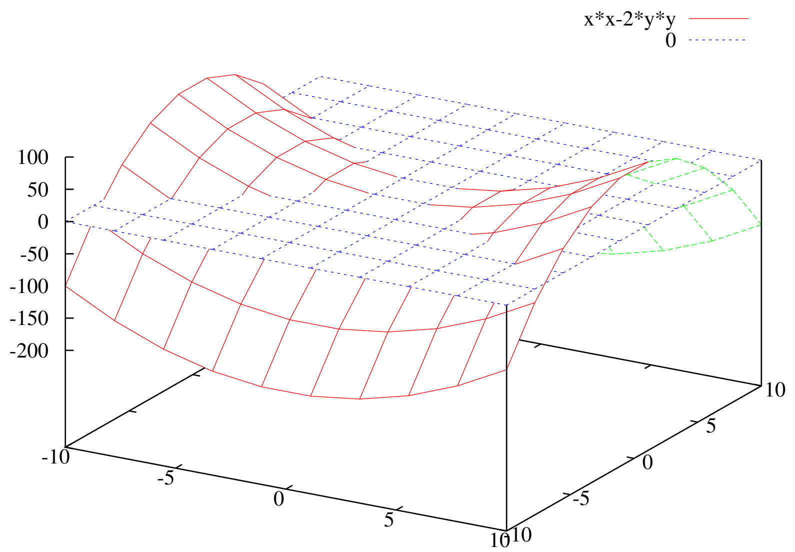
Savoir faire 2 Ecrire la matrice hessienne au point $(0,0)$ dans les cas suivants. Que peut-on conclure ? Est-on en présence d'un minimum ?

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^3 \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^4 \end{array} \right.$

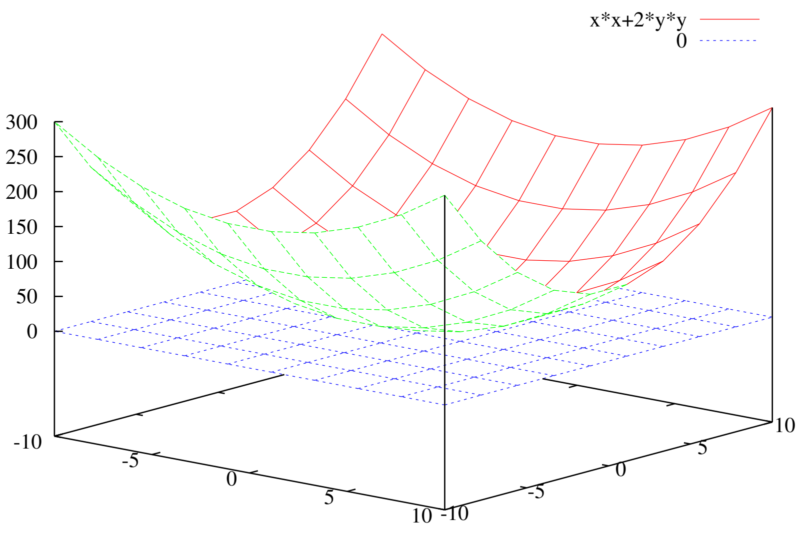
Savoir faire 3 On suppose que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre 2 en $(0,0)$, que la matrice jacobienne est nulle et que les valeurs propres de la matrice hessienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$ sont λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (on pourra prendre par exemple $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 2$). Montrer que f admet un minimum en $(0,0)$.



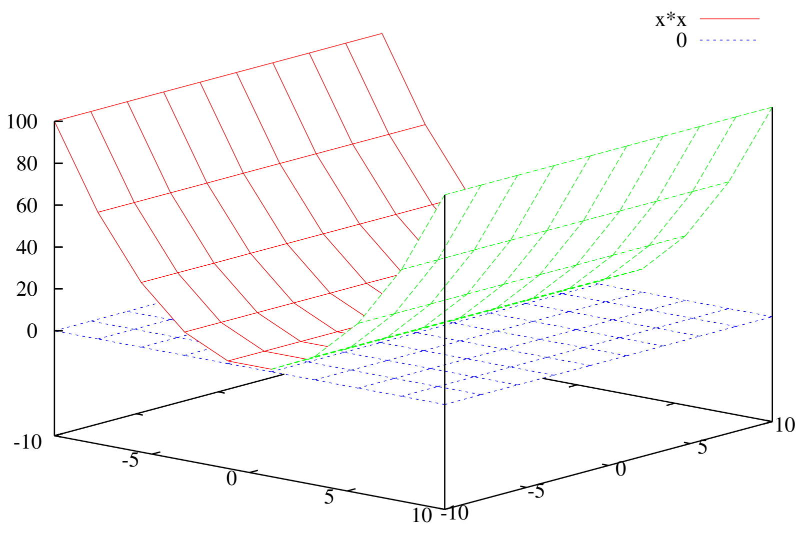
$$[f(x,y) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 + xy + y^2]$$



$$\varphi(x,y) = x^2 - 2y^2$$



$$\varphi(x,y) = x^2 + 2y^2$$



$$\varphi(x,y) = x^2$$