Fonctions définies par une intégrale

Domination

1 Introduction

Des exemples Une fonction peut être définie par une intégrale. Exemples :

1. $I(x) = \int_0^x f(t)dt$ avec f continue sur $\mathbb{R}$. I est définie sur $\mathbb{R}$. C'est la primitive de f qui s'annule en 0.
2. $J(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$ avec f continue sur $\mathbb{R}$. J est définie sur $\mathbb{R}$ on a $J'(x) = f(x) + f(-x)$.
3. $K(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$.
4. $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. La fonction existe pour $x > 0$. Est-elle continue, dérivable ?

Définition 1 Soient X et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I et que $\int_I f(x,t)\,dt$ converge. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est bien définie sur l'intervalle X et elle s'appelle "intégrale dépendant d'un paramètre".

Savoir faire 1 Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}dt$.

1. Pour quelles valeurs de x la fonction F est-elle définie ?
2. Montrer que $F(0) = 0$ et que $F(-x) = -F(x)$

2 Domination globale

Définition 2 Soit f une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

On dit que f vérifie l'hypothèse de domination sur $X \times I$ s'il existe une fonction φ continue et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in X \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Théorème 1 Si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ vérifie l'hypothèse de domination, alors $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie pour tout $x \in X$.

Savoir faire 2 Soit $a > 0$, $b > 0$ et f une application de $[a,b] \times \mathbb{R}^+$ définie par $f(x,t) = xe^{-xt}$. Montrer que f vérifie l'hypothèse de domination.